

дифференциального криптоанализа алгоритма шифрования ГОСТ 28147-89 // Материалы IX Международной научно-практической конференции «Информационная безопасность». Часть 2. Таганрог: изд-во ТТИ ЮФУ, 2007. С. 92-97.

3. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р. Алгоритмы: построение и анализ. М.: МЦНМО, 2001. 960 с.
4. Чмора А.Л. Современная прикладная криптография. 2-е изд., М.: Гелиос АРВ, 2002.
5. Шнайер Б. Прикладная криптография. Протоколы, алгоритмы, исходные тексты на языке Си. М.: ТРИУМФ, 2002.

Бабенко Людмила Климентьевна, д.т.н., профессор кафедры БИТ Технологического института Южного Федерального государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганрог, тел.: 8-(8634)-312018, факс: 8-(8634)-312018, e-mail: blk@fib.tsure.ru

Ищукова Евгения Александровна, к.т.н., доцент кафедры БИТ Технологического института Южного Федерального государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганрог, тел.: 8-(8634)-312018, факс: 8-(8634)-312018, e-mail: blk@fib.tsure.ru

СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ ТЕЛЕТРАФИКА ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ СОТОВЫХ СИСТЕМ СВЯЗИ

О.А. Шорин

Национальный институт радио и телекоммуникаций

MODERN METHODS OF THE THEORY OF TELETRAFFIC AT DESIGNING OF CELLULAR COMMUNICATION SYSTEMS

O.A. Shorin

В основу известных теоретических и прикладных методов проектирования систем подвижной радиосвязи в настоящее время положен подход классической теории массового обслуживания, ориентирующийся на фиксированный уровень общей нагрузки. Для существующих сотовых систем связи, включая сотовые сети вплоть до 2-го поколения, он вполне оправдан, хотя в определенных ситуациях не позволяет обеспечить нужную точность анализа качества обслуживания. Из-за измельчения структуры покрытия и увеличения удельной нагрузки для систем 3G становится важно не только понять, как решать задачи борьбы с перегрузками в новых условиях, но и определить границы применимости традиционных методов, установить каким именно образом уменьшение размеров сот, повышение мобильности абонентов влияет на эти границы.

Ключевые слова: телетрафик, сотовые системы связи, базовые станции, пуассоновский поток, мобильные абоненты, прогноз перегрузок, критерий оптимальности, формула Эрланга, вероятность отказа.

В основу известных теоретических и прикладных методов проектирования систем подвижной радиосвязи в настоящее время положен подход классической теории массового обслуживания, ориентирующийся на фиксированный уровень общей нагрузки, который понимается как заданный внешними условиями. Для существующих систем связи подвижных абонентов, включая сотовые сети вплоть до 2-го поколения, он вполне оправдан, хотя в определенных ситуациях не позволяет обеспечить нужную точность. Справедливость использования методов классической теории массового обслужи-

In a basis of a known theoretical and applied design technique of systems of a mobile radio communication the approach of the classical queueing theory oriented to fixed level of a common load now is supposed. For existing cellular communication systems, including cellular networks up to 2nd generation, it is quite justified, though in certain situations does not allow to ensure the necessary exactitude of the analysis of a grade of service. Because of crushing of structure of a coverage and magnifying of an intensity of distributed load for systems 3G it becomes important, not only to understand, how to solve tasks of struggle against overloads in new conditions, but also to define boundaries of applicability of traditional methods, to instal in which image reduction of the sizes of cells, rise of mobility of abonents influences these boundaries.

Keywords: teletraffic, cellular communication systems, base stations, Poisson stream, mobile subscribers ISDN, overload estimate, optimality test, Erlangian formula, probability of refusal.

вания основывается на том, что зонное покрытие в системах до 2-го поколения организовано так, что отдельные БС обслуживают большое число абонентов с низкой удельной средней нагрузкой (от 0.001 до 0.03 Эрл./абонент). В результате базовые станции (БС) всегда работают с усредненными характеристиками при небольших уровнях флуктуаций. Динамика изменения усредненных характеристик в таких ситуациях низкая, что позволяет обходиться усредненными параметрами в виде нагрузки в ЧНН (час наибольшей нагрузки) или ряда градаций по нагрузке с введением под каждую собственного

режима работы. В современных условиях указанные предположения теряют силу.

Из-за измельчения структуры покрытия и увеличения удельной нагрузки для систем 3G, даже при наличии условий стационарности и однородности, оказывается неверным закон Эрланга, повсеместно утвердившийся в качестве инструмента решения задач разработки и анализа систем связи. Он трансформируется в закон Энгеста-О'Делла, для которого уже не существует однозначной связи между средней нагрузкой и вероятностью блокировок. Поэтому становится важно не только понять, как решать задачи борьбы с перегрузками в новых условиях, но и определить границы применимости традиционных методов, установить, каким именно образом уменьшение размеров сот, повышение мобильности и, может быть, некоторых других параметров влияет на эти границы.

Изменение профиля современных систем связи, в котором основной режим отводится обмену цифровыми данными, приводит к тому, что удельное значение нагрузки на абонента существенно увеличивается. При этом информационные потоки приобретают прямую связь с потоками мобильности. Локальные концентрации абонентов, возникающие по причине автомобильных пробок, проведения массовых мероприятий, возникновения внешних синхронизирующих условий непосредственно порождают локальные перегрузки в информационных потоках. В таких условиях особое значение приобретают вопросы создания адекватных описательных моделей и методов контроля мобильности на уровне отдельных сот/зон. В качестве технической основы для решения поставленной задачи может выступать служба контроля мобильности (слой ММ), которая применяется в существующих системах для решения задач ограниченного поиска абонентов при вызовах и поддержки непрерывной связи. При этом следует только более рационально использовать информационный ресурс, сосредоточенный в указанной службе, которая фактически имеет полные данные обо всех абонентах, входящих и выходящих из каждой соты/зоны.

Для описания мобильности внутри отдельной соты/зоны предлагается модель в виде объекта теории массового обслуживания, в который входящие абоненты (запросы) поступают в виде нестационарного пуассоновского потока с интенсивностью $\lambda^m(t)$, а выходящие абоненты (обслуженные запросы) подчиняются закону нестационарного пуассоновского потока с интенсивностью $i(t) \cdot \mu^m(t)$, где $i(t)$ – число абонентов в соте. При этом широкий спектр реальных ситуаций, таких как: возникновение/рассасывание автомобильных пробок; проход/проезд через экранирующие тоннели; постепенное увеличение (снижение) концентрации в начале (конце) рабочего времени; периодически возникающие всплески на выходах из метро; срывы расписаний движения, перерывы занятий в ВУЗах и т.п., доста-

точно хорошо описывается предлагаемой моделью с интенсивностями потоков в виде:

$$\lambda^m(t) = \begin{cases} \lambda_A^m, & \text{при } t < t_0^*, \\ \lambda_B^m + \lambda_C^m(t - t_0^*), & \text{при } t \geq t_0^*, \end{cases} \quad (1)$$

$$\mu^m(t) = \begin{cases} \mu_A^m, & \text{при } t < t_0, \\ \frac{\mu_B^m}{1 + \mu_C^m \cdot (t - t_0^*)}, & \text{при } t \geq t_0, \end{cases} \quad (2)$$

где t_0^* и t_0 – неизвестные моменты возникновения «скачкообразно-линейного» изменения интенсивностей $\lambda_A^m, \lambda_B^m, \lambda_C^m, \mu_A^m, \mu_B^m$ и μ_C^m – априорно неизвестные параметры, задающие интенсивности входящего и выходящего потоков абонентов в условиях нестационарного поведения. На рис. 1 качественно показаны четыре типа возможных ситуаций с изменениями интенсивности на входе и четыре типа ситуаций с изменениями удельной интенсивности на выходе, отвечающими модели (1), (2).

Проведенное на основе опыта эксплуатации исследование показало, что динамика переходных процессов, описывающих изменение числа абонентов в соте, существенно ниже динамики переходных процессов, описывающих установление средней нагрузки соты. Поэтому, если перегрузка в соте происходит по причине скопления абонентов, то ее можно предсказать на более ранних этапах с помощью анализа изменений параметров процессов, описывающих потоки межсотовых перемещений абонентов. Поэтому можно утверждать, что анализ процессов, порождающих локальные скопления людей и транспорта, представляет наиболее удобное средство для предсказания и своевременных действий по предотвращению потери качества связи по причине локальных перегрузок сети.

Для этого в [1] была решена задача синтеза алгоритма автоматического обнаружения нестационарного поведения мобильных абонентов, идентификации типа такого поведения и оценки параметров, отвечающих общей модели (1), (2). Было установлено, за какое реальное время достигается достоверное (с заданной вероятностью ошибки) обнаружение ситуаций, грозящих возникновением локальных перегрузок, и сформулированы требования к быстрдействию процедур управления перераспределением ресурсов.

Впервые предлагается подход, позволяющий мобильность абонентов рассматривать как макропараметр системы, проявляющийся на уровне выделенной соты/зоны, а не в традиционном понимании в виде элемента процедуры «хэндовера», связываемой с каждым отдельным перемещающимся абонентом. С учетом известного физического явления – возникновения ударных волн интенсивности трафика в мобильных потоках при существенных внешних воздействиях, предложена

обобщенная модель описания динамического поведения подвижных абонентов в нестационарных условиях, охватывающих широкий спектр реальных ситуаций. При этом на уровне отдельной соты/зоны СПР (система подвижной радиосвязи) выступает как система массового обслуживания, функционирующая в нестационарных условиях.

На основе предложенного подхода проведен анализ того, как мобильность абонентов, ограничение их количества и случайные флуктуации численности могут влиять на характеристики перегрузок в сотах различного размера (макро, микро и пико). Главной целью указанного анализа было установить, сохраняют ли силу, и если да, то какую погрешность имеют традиционные подходы расчета нагрузочной способности, например, с помощью таблиц Эрланга, в условиях уменьшения размеров сот. Для этого предлагается отказаться от традиционного подхода, в котором условия работы в соте/зоне задаются единственным параметром в виде суммарной нагрузки. Вместо этого для описания поведения СПР на уровне отдельной соты/зоны использовался двумерный марковский процесс, включающий случайное число абонентов i и число активных соединений n . При описании поведения «мобильной» компоненты рассматривался ряд моделей, среди которых особо выделены две: типа М1 (аналог системы массового обслуживания М/М/1 в классификации Кендалла) и типа Эрланга (аналог М/М/∞). В результате возник дополнительный параметр описания состояний, который в работе назван «мобильной нагрузкой соты». Для модели М1 он оказался равным $\rho_0^m = \lambda_0^m / \mu_0^m$, где λ_0^m – интенсивность запросов регистрации в соте/зоне, порождаемых входящим потоком абонентов, μ_0^m – интенсивность запросов на отключение, порождаемых выходящим потоком абонентов, а для модели Эрланга $\rho^m = \lambda^m / \mu^m$, где λ^m – интенсивность входящего потока регистраций, μ^m – удельная (в расчете на одного абонента соты/зоны) интенсивность потока запросов на отключение.

На основе метода уравнений баланса фаз применительно к введенному двумерному марковскому процессу были получены аналитические соотношения для вероятности перегрузок в соте/зоне, возникающих в условиях мобильности абонентов ($\rho_0^m < 1$). Указанные результаты приведены в табл. 1. В формулах табл. 1 использовались обозначения: λ – удельная (на одного свободного абонента) интенсивность потока запросов на подключение к системе, μ – удельная (на одного активного абонента) интенсивность потока завершений обслуживания, $P_{кр}$ – вероятность возникновения перегрузки, N – общее число активных соединений, которое может поддерживаться сотой/зоной, $C_i^k = i! / (i-k)! k!$ – биномиальный коэффициент. При этом оказалось, что учет мобильности приводит к тому, что вероятности перегрузки, рассчитываемые с позиций режима подключения отдельного абонента и с позиций работы системы

(относительный уровень потока отказов на базовой станции), становятся разными.

На рис. 2 приведены результаты расчета вероятности перегрузки, выполненные с учетом мобильного поведения, и полученные с помощью традиционной техники таблиц Эрланга. На рис. 2 также приведены результаты, полученные с помощью известной модели Энгеста, которая в отличие от закона Эрланга учитывает ограничение на общее число абонентов. Как можно видеть, закон Энгеста дает более близкое совпадение результатов (в сравнении с законом Эрланга) с теми, которые получены с учетом мобильности. Все зависимости практически совпадают в условиях удельных нагрузок менее 0.1 Эрл, что наиболее характерно для систем 2-го поколения, использующих макросоты. Для систем 3-го поколения удельная абонентская нагрузка планируется более высокой, поэтому, как показали результаты анализа, для них применение традиционной техники таблиц Эрланга будет приводить к серьезным погрешностям. Основной вклад в указанные ошибки привносит то, что в модели Эрланга не учитывается фактор ограниченности общего числа абонентов в соте/зоне. Модель Энгеста, учитывающая его, остается достаточно точной вплоть до уровней удельных нагрузок 0.4–0.5 Эрл.

Проведены расчеты оценок параметров мобильности λ_m и μ_m (модель типа Эрланга) для стандартных макро-, микро- и пикосот. Расчеты даны для трех базовых скоростей перемещения абонентов, равных 5, 50 и 120 км/ч. С учетом полученных результатов на основе соотношений табл. 1 проводится анализ зависимости вероятностей перегрузки от суммарной нагрузки макро-, микро- и пикосоты. Сопоставление с результатами таблиц Эрланга показало, что заметные расхождения данных возникают только для пикосот в условиях движения абонентов со скоростями 50 и 120 км/ч. С учетом мобильности оценка предельной нагрузки в пикосотах оказывается выше результатов таблиц Эрланга на 10% (50 км/ч) или 33% (120 км/ч). На этом основании был сделан вывод, что мобильность в стационарных условиях работы на уровне предельных вероятностей перегрузок, допускаемых стандартами, начинает сказываться, начиная с микросотового и пикосотового покрытий в областях с высокой скоростью перемещения абонентов.

Проведен анализ чувствительности вероятности перегрузки соты/зоны к пространственным изменениям параметров мобильности на переходе из внутренней области соты/зоны во внешнее пространство. Выявлена высокая степень зависимости вероятности перегрузки от пространственной неоднородности поведения мобильных потоков. Так, например, при локальном замедлении скорости движения мобильного потока от 50 км/ч до 5 км/ч для всех трех типов сот наблюдалось снижение предельного уровня суммарной нагрузки примерно на порядок. Поскольку для микро- и пикосот такие

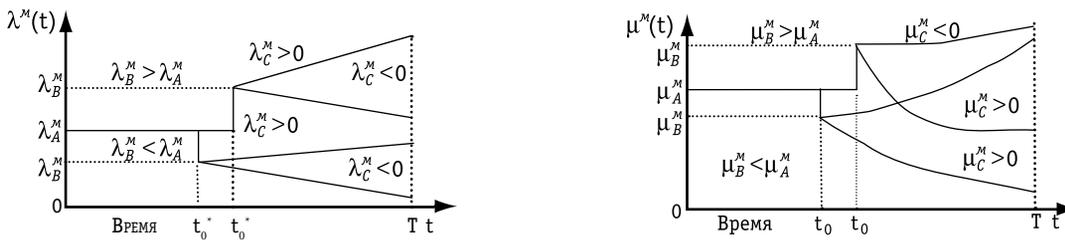


Рис. 1. Четыре варианта возможных изменений интенсивности входящих запросов на регистрацию в соте и выходящих запросов на отключение в зависимости от партнеров используемой модели

ситуации вполне вероятны, то был сделан вывод, что бороться с локальными перегрузками путем резервирования дополнительных ресурсов по всей системе в целом невозможно. Необходима организация работы в режиме обнаружения (желательно заблаговременного) возникающих локальных перегрузок и распределения ограниченного резервного ресурса системы в соты/зоны, в которых наблюдается рост концентрации абонентов.

Для описания нестационарного поведения мобильных абонентов предлагается универсальная модель, охватывающая широкий спектр реальных ситуаций с изменяющимися интенсивностями входящих и выходящих потоков, основанная на физическом явлении возникновения ударных волн ограниченного перечня видов (в данном случае это моноклинные, треугольные волны и волны N-типа) в потоках при значимых внешних воздействиях. Поскольку в ударных волнах мобильных потоков диффузионная составляющая невелика, а эффект опрокидывания невозможен, то для изменений интенсивности были выбраны модели скачка, линейного роста/падения и комбинации скачка с последующим линейным изменением. Аналитическое представление изменяющихся интенсивностей входящего и выходящего потоков в динамических ситуациях, описываемых принятой общей моделью, дают соотношения (1) и (2). На рис. 1 качественно показано поведение параметров интенсивности потоков в основных ситуациях с динамическим поведением мобильности, допустимых в рамках принятой общей модели.

Вопросам обнаружения и оценки параметров скачка интенсивности пуассоновского потока посвящены работы А.И. Демьянова и В.К. Бутейко, А.П. Трифонова. Результаты этих работ вполне могут быть использованы для решения рассматриваемой задачи, но только при ограничении общей модели случаями со скачками интенсивности входящего потока. Поэтому возникла необходимость решения более общей задачи обнаружения и оценки параметров динамической системы массового обслуживания $M/M/\infty$ (мобильность соты/зоны типа Эрланга), подчиняющейся модели (1), (2).

В результате статистического синтеза были получены искомые совместные алгоритмы, удовлетворяющие критериям Неймана-Пирсона (в части обнаружения/идентификации ситуаций) и

критерию максимального правдоподобия (в части формирования оценок параметров). Относительно полученных результатов следует отметить два важных обстоятельства. Первое (положительного свойства): полученное в ходе решения отношение правдоподобия оказалось факторизуемым на множители, один из которых зависит только от параметров, связанных с интенсивностью входящего потока $\lambda^m(t)$, а другой – только от параметров удельной интенсивности выходящего потока $\mu^m(t)$. Это обеспечило возможность независимого решения задач для входящего и выходящего потоков. Второе (отрицательного свойства): аналитических решений в замкнутой форме для оценок неизвестных моментов возникновения нестационарного поведения мобильных потоков t_0 получить не удастся. Последнее обстоятельство фактически исключает возможность применения рекуррентных правил, алгоритмов фильтрации или алгоритмов с использованием скользящих усреднений, ввиду их высокой вычислительной сложности. Конструктивным способом остается организация контроля мобильности путем обработки данных на перекрывающихся временных интервалах. На каждом таком интервале задача решается отдельно.

Были найдены аналитические соотношения, определяющие смещения и дисперсии соответствующих оценок параметров мобильности, получены рабочие характеристики алгоритмов различения типов ситуаций.

Характер полученных результатов показывает, что работа алгоритмов обнаружения и оценки параметров нестационарного поведения мобильности в своей основе построена на анализе «неоднородности» концентрации моментов поступления запросов регистрации (t_1, t_2, \dots, t_{N_2}) и моментов выхода из соты/зоны ($\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_K$). Относительно равномерное распределение приводит к решениям о наличии стационарного поведения. Результаты, связанные с анализом входящего потока, зависят только от неоднородности распределения моментов входящих запросов регистрации в соте/зоне. Результаты для выходящего потока связаны с относительным рассогласованием концентраций точек потоков входящих регистраций и запросов на отключение (выход из соты/зоны).

Проанализирован ряд технологических задач, возникающих при практическом использовании

Таблица 1. Вероятности перегрузок в соте/зоне

Динамика абонентов в зоне, отвечающая модели M1	Динамика абонентов в зоне, отвечающая модели Эрланга
$P_{кр} = (1 - \rho_0^m) \cdot (\lambda/\mu)^N \sum_{i=N}^{\infty} \frac{(\rho_0^m)^i C_i^N}{\sum_{m=0}^N (\lambda/\mu)^m C_i^m}$	$P_{кр} = \exp(-\rho^m) \cdot (\lambda/\mu)^N \sum_{i=N}^{\infty} \frac{(\rho^m)^i C_i^N}{i! \sum_{m=0}^N (\lambda/\mu)^m C_i^m}$

полученных выше алгоритмов обнаружения/оценки параметров динамически изменяющегося поведения мобильных абонентов для предсказания и парирования ситуаций с локальными перегрузками. На основе анализа тренда переходного процесса накопления абонентов в зоне/соте, возникающего после изменения интенсивностей мобильных потоков, получены соотношения для качественной оценки задержки до момента возникновения перегрузки. На основе таких соотношений оператор связи (или система контроля, работающая в автоматическом режиме) может принять решение о том, будет ли в изменившихся условиях возникать перегрузка и если да, то через какое время она возникнет. Оказалось, что расчетные соотношения зависят от параметров размера соты, характера изменения интенсивностей мобильных потоков в рамках модели (1), (2) и от предельного уровня допустимой нагрузки.

Возможность упреждающего предсказания перегрузки была подтверждена для всех типов сот (пико-, микро- и макро-) при линейном изменении интенсивностей (без скачков). В условиях скачкообразных изменений интенсивностей мобильных потоков заблаговременное предсказание (за 100–150 секунд) перегрузки достигается только для макро сот. Для микро- и пикосот перегрузка наступает либо одновременно, либо даже с некоторым опережением завершения процедуры обнаружения изменения динамического поведения мобильных абонентов. Поэтому для таких сот сразу после обнаружения критического состояния изменившейся мобильности необходимо включать режим перераспределения резервных ресурсов для устранения возникающей перегрузки, или (когда полное устранение перегрузки невозможно) для уменьшения ее негативного влияния.

В условиях возникновения задержки до прогнозируемой перегрузки предлагается ввести дополнительный режим прямого контроля нагрузки или числа зарегистрированных абонентов в соте. Фактически он сводится к обнаружению момента превышения нагрузки (числа абонентов) некоторого порога, после чего включается процедура перераспределения резервных ресурсов. Для организации такого режима предлагается ряд расчетных соотношений, задающих его длительность и уровень порога срабатывания.

Получены результаты решения рассматриваемой задачи как задачи фильтрации интенсивности пуассоновского потока, изменяющейся по закону диффузионного стохастического процесса. В этой постановке интенсивность пуассоновского потока изменяется во времени как стохастический диффузионный процесс, удовлетворяющий уравнению движения в форме Ито

$$\frac{d}{dt} \lambda(t) = -\alpha(\lambda(t) - \lambda_0) + \frac{\beta}{\lambda(t)} + \sqrt{\gamma} \cdot n_{\lambda}(t), \quad (3)$$

где $n_{\lambda}(t)$ – порождающий процесс для уравнения движения в виде белого гауссовского шума с единичной двусторонней спектральной плотностью мощности ($N_0/2=1$), α , β , γ и λ_0 – известные постоянные параметры.

Известно, что уравнение (3) описывает марковский диффузионный процесс с коэффициентами сноса и диффузии:

$$A(\lambda, t) = -\alpha(\lambda - \lambda_0) + \frac{\beta}{\lambda},$$

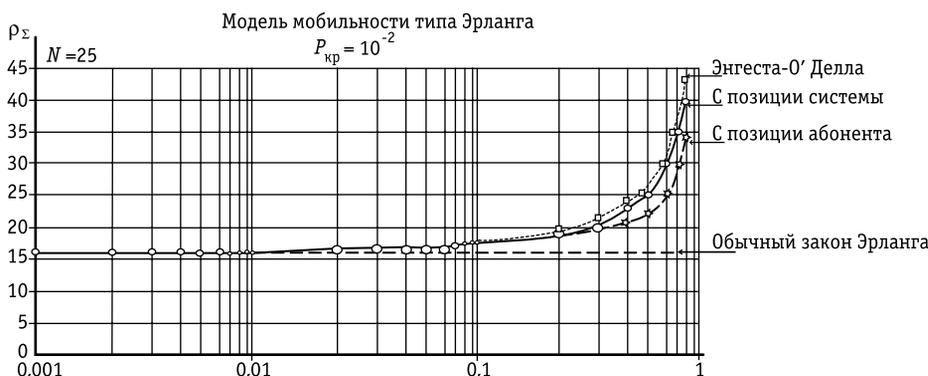


Рис. 2. Зависимости предельной суммарной нагрузки соты $\rho_{\Sigma} = \rho m$ от удельной абонентской нагрузки $\rho = \lambda/\mu$, рассчитанные с учетом мобильности и традиционно (по таблицам Эрланга) при $P_{кр} = 10^{-2}$

$$B(\lambda, t) = \gamma.$$

Уравнение Фокера-Планка-Колмогорова, описывающее плотность вероятности λ , при этом будет таким

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} W(\lambda, t) &= -\frac{\partial}{\partial \lambda} (A(\lambda, t)W(\lambda, t)) \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} (B(\lambda, t)W(\lambda, t)) = \\ &= \frac{\partial}{\partial \lambda} (\alpha(\lambda - \lambda_0)W(\lambda, t)) + \frac{\gamma}{2} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} W(\lambda, t). \end{aligned} \quad (4)$$

В установившемся состоянии плотность вероятности, согласно (4), должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} (\alpha(\lambda - \lambda_0)W_{st}(\lambda)) + \frac{\gamma}{2} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} W_{st}(\lambda) = 0.$$

Последнее уравнение можно проинтегрировать, с учетом того, что, согласно физическому смыслу задачи, $W_{st}(\lambda) \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} 0$. В результате получим

$$\frac{d}{d\lambda} W_{st}(\lambda) = \frac{2}{\gamma} \left(-\alpha(\lambda - \lambda_0) + \frac{\beta}{\lambda} \right). \quad (5)$$

Дифференциальное уравнение (5) имеет решение

$$W_{st}(\lambda) = C_N \cdot \lambda^{\frac{2\beta}{\gamma}} \cdot \exp\left(-\frac{\alpha}{\gamma}(\lambda - \lambda_0)^2\right), \quad (6)$$

где C_N – коэффициент нормировки, точное представление которого не имеет принципиального значения.

Из (6) видно, что модель (3) при различном выборе коэффициентов может приводить к стационарным распределениям параметра интенсивности λ , подчиняющимся многомерным законам Релея, Гаусса или законам, близким к распределению Райса.

Наблюдению доступна реализация пуассоновского потока с моментами возникновения событий

$$\vec{t} = (t_1, t_2, \dots, t_k, \dots). \quad (7)$$

Предполагаем, что известны параметры уравнения движения (3) и доступны наблюдения моментов пуассоновского потока (7), а также начальное распределение интенсивности, которое достаточно хорошо аппроксимирует нормальный закон

$$W_0(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0}} \exp\left(-\frac{(\lambda - \Lambda_0)^2}{2\sigma_0^2}\right), \quad (8)$$

где Λ_0 и σ_0^2 – априорные среднее и дисперсия интенсивности λ , причем $\Lambda_0 \gg \sigma_0$, что позволяет не принимать во внимание возможность $\lambda < 0$ в априорном распределении (8).

В таких условиях требуется решить задачу фильтрации стохастического процесса $\lambda(t)$.

Для решения поставленной задачи использовалась методика инвариантного погружения [2]. При этом при выводе уравнений фильтрации с помощью техники инвариантного погружения (приближенная методика) используется компонента, связанная с наблюдениями, в виде предельного отношения

$$F(z(t), x(t)) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\ln(W_n(z(t), x(t)))}{\Delta t}, \quad (9)$$

где $W_n(z(t), x(t))$ – плотность вероятности наблюдения на интервале $[t, t + \Delta t]$ процесса $z(t)$, при условии того, что фильтруемый сигнал на том же интервале имеет вид $x(t)$.

Поскольку:

$$W_n(z(t), \lambda(t)) = \begin{cases} 1 - \lambda(t)\Delta t, & \text{если на интервале } [t, t + \Delta t) \\ \text{нет точек } t_k \text{ пуассоновского потока} \\ \lambda(t)\Delta t, & \text{если на интервале } [t, t + \Delta t) \\ \text{присутствует одна из точек} \\ \text{пуассоновского потока} \end{cases}$$

то:

$$F(z(t), \lambda(t)) = \begin{cases} -\lambda, & \text{при } t \neq t_k, k = 1, 2, \dots, \\ \frac{\ln \Delta t}{\Delta t} + \ln(\lambda), & \text{при } t = t_k, k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Соответственно, в уравнениях фильтрации следует использовать

$$\frac{\partial}{\partial \lambda(t)} F(z(t), \lambda(t)) = \begin{cases} -1, & \text{при } t \neq t_k, k = 1, 2, \dots, \\ \frac{1}{\lambda}, & \text{при } t = t_k, k = 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (10)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \lambda(t)^2} F(z(t), \lambda(t)) = \begin{cases} 0, & \text{при } t \neq t_k, k = 1, 2, \dots, \\ \frac{1}{\lambda^2}, & \text{при } t = t_k, k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (11)$$

Выполняя указанную подстановку, приходим к искомым уравнениям фильтрации интенсивности пуассоновского потока:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \hat{\lambda}(t) = -\alpha(\hat{\lambda}(t) - \lambda_0) + \frac{\beta}{\hat{\lambda}(t)} + P(t) \left[\frac{1}{\hat{\lambda}(t)} \sum_k \delta(t - t_k) - 1 \right], \\ \frac{d}{dt} P(t) = \gamma - 2P(t) \left(\alpha + \frac{\beta}{\hat{\lambda}^2(t)} \right) - P^2(t) \frac{1}{\hat{\lambda}^2(t)} \sum_k \delta(t - t_k), \end{cases} \quad (12)$$

где $\hat{\lambda}(t)$ (t) – оценка интенсивности пуассоновского потока, формируемая в результате фильтрации, $P(t)$ – дисперсия ошибок фильтрации, $\sum_k \delta(t-t_k)$ –

последовательность δ -функций Дирака, с выбросами в моменты $\vec{t} = (t_1, t_2, \dots, t_k, \dots)$ совпадающими с точками наблюдаемого пуассоновского потока (7).

Решение системы (12) следует производить с начальными условиями

$$\begin{cases} \hat{\lambda}(0) = \Lambda_0, \\ P(0) = \sigma_0^2. \end{cases} \quad (13)$$

Совокупность уравнений (12) и (13) определяет решение поставленной задачи фильтрации интенсивности пуассоновского потока (3), (7). Соответствующий алгоритм может быть реализован с помощью доступных технических средств.

В условиях относительно малых или относительно медленных флуктуаций параметра интенсивности $\lambda(t)$ можно найти установившееся значение дисперсии ошибок фильтрации $P_{st}(t)$, решая усредненное во времени уравнение

$$\begin{aligned} & \gamma - 2P_{st}(t) \cdot \left(\alpha + \frac{\beta}{\lambda^2(t)} \right) - \\ & - P_{st}^2(t) \frac{1}{\lambda^2(t)} \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} \sum_k \delta(t-t_k) = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Используя то, что при оговоренных условиях $\frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} \sum_k \delta(t-t_k) \approx \hat{\lambda}(t)$, получаем

$$P_{st}^2(t) + 2P_{st}(t) \cdot \left(\alpha \hat{\lambda}(t) + \frac{\beta}{\lambda(t)} \right) - \gamma \cdot \hat{\lambda}(t) = 0,$$

откуда искомого значения

$$P_{st}(t) = - \left(\alpha \hat{\lambda}(t) + \frac{\beta}{\lambda(t)} \right) + \sqrt{\left(\alpha \hat{\lambda}(t) + \frac{\beta}{\lambda(t)} \right)^2 + \gamma \hat{\lambda}(t)}. \quad (15)$$

При этом уравнение фильтрации можно записать в приближенной форме

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \hat{\lambda}(t) = - \alpha (\hat{\lambda}(t) - \lambda_0) + \\ & + \frac{\beta}{\hat{\lambda}(t)} + P_{st}(t) \left[\frac{1}{\hat{\lambda}(t)} \sum_k \delta(t-t_k) - 1 \right]. \end{aligned}$$

В частности, когда $\beta=0$ и $\alpha^2 \lambda_0 \ll \gamma$, то

$P_{st}(t) \approx \sqrt{\gamma \cdot \hat{\lambda}(t)} \approx \sqrt{\gamma \cdot \lambda_0}$ и фильтрация может быть выполнена согласно уравнению

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \hat{\lambda}(t) \approx - \left(\alpha + \sqrt{\frac{\gamma}{\lambda_0}} \right) \left(\hat{\lambda}(t) - \lambda_0 \frac{\alpha}{\alpha + \sqrt{\gamma/\lambda_0}} \right) + \\ & + \sqrt{\frac{\gamma}{\lambda_0}} \cdot \sum_k \delta(t-t_k), \end{aligned}$$

с начальным условием $\hat{\lambda}(0) = \Lambda_0$

Решение (15) можно получить в явном виде, значение $\hat{\lambda}(t)$ при этом получается как сумма

$$\lambda_0 \frac{\alpha}{\alpha + \sqrt{\gamma/\lambda_0}}$$

и результат усреднения в экспоненциальном весовом окне

$$R(\tau, t) = \sqrt{\frac{\gamma}{\lambda_0}} \exp \left(- \left(\alpha + \sqrt{\frac{\gamma}{\lambda_0}} \right) (t - \tau) \right),$$

где $\tau \in (-\infty, t)$ последовательности δ -функций $\sum_k \delta(t-t_k)$, с моментами выбросов в

позициях наблюдаемого пуассоновского потока (5).

Эффективная длительность окна усреднения оказывается зависящей от параметров уравнения движения и составляет величину $T_{ycp} \approx \left(\alpha + \sqrt{\frac{\gamma}{\lambda_0}} \right)^{-1}$.

При этом хорошее качество процедуры фильтрации

будет выполняться, если $\lambda_0 T_{ycp} = \frac{\lambda_0}{\alpha + \sqrt{\gamma/\lambda_0}} \gg 1$, т.е.,

когда $\lambda_0 \gg \alpha$ и $\lambda_0^3 \gg \gamma$.

Решение задачи в такой постановке дает дополнительные возможности по проектированию и анализу систем подвижной радиосвязи не только как систем массового обслуживания с технической точки зрения, но и строить бизнес-модели развития этих систем, аппроксимируя процесс получения дохода оператора пуассоновским случайным процессом. Количественные результаты анализа использования этой модели являются целью дальнейших исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шорин О.А. Методы оптимального распределения частотно-временного ресурса в системах подвижной радиосвязи. Дис. докт. техн. наук. М.: МТУСИ, 2005. 236 с.
2. Сейдж Э., Мелса Дж. Идентификация систем управления. М.: Наука, 1974.

Шорин Олег Александрович, д.т.н., доцент, профессор кафедры Московского технического университета связи и информатики, генеральный директор ЗАО «Национальный институт радио и телекоммуникаций», зам. председателя отделения РАЕН «Экономика и качество систем связи», тел.: +7(905)960-09-52, e-mail: oshorin@rambler.ru