

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ ШЕННОНА ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ ОПТИМАЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ СИГНАЛА В УСЛОВИЯХ ОГРАНИЧЕНИЯ ПИКОВОЙ МОЩНОСТИ

*О.А. Шорин, Генеральный директор ООО «НСТТ», профессор, д.т.н. oshorin@gmail.com;
Г.О. Бокк, директор по науке ООО «НСТТ» д.т.н., bgo@nxtt.org*

УДК 621.391:621.396

Аннотация. Предлагается методика синтеза оптимальной амплитудно-фазовой структуры радиосигнала, обеспечивающей максимальную скорость информационного обмена в условиях ограничений пиковой мощности. Исследуется случай дополнительных ограничений, накладываемых на форму сигнальной амплитудно-фазовой структуры со стороны существующих методов цифровой связи.

Ключевые слова: граница Шеннона; модуляция; радиоканал; пиковая мощность; амплитудно-фазовая плоскость.

ANALYTICAL SOLUTION OF THE VARIATIONAL SHANNON PROBLEM TO DETERMINE THE OPTIMAL SIGNAL STRUCTURE UNDER CONDITIONS OF PEAK POWER LIMITATION

*Oleg Shorin, General director of LLC «NXTT», professor, doctor of technical science;
German Bokk, science director of LLC «NXTT», doctor of technical science*

Annotation. The method of synthesis of the optimal amplitude-phase structure of the radio signal providing the maximum speed of information exchange under conditions of peak power limitation is proposed. The case of additional constraints imposed on the shape of the signal amplitude-phase structure by the existing methods of digital communication is investigated.

Keywords: Shannon boundary; modulation; radio channel; peak power; amplitude-phase plane.

Введение

Скорость информационного обмена в последнее время из чисто технического параметра превратилась в экономический и даже финансовый показатель, связанный с работой сетей мобильной связи [1]. Сформировался довольно широкий перечень технологических средств [2, 3], методов управления [4, 5] и настройки [6, 7], ориентированных на ее увеличение. Задача выхода на предельно возможные показатели скорости приобрела высокую актуальность. Но ее решению препятствовало отсутствие высокоэффективных методов кодирования с исправлением ошибок, обладающих умеренной вычислительной сложностью и характеристиками, близкими к предельным.

В методах канального кодирования на современном этапе достигнут значительный прогресс, позволивший для ряда конкретных ситуаций фактически выйти на уровень теоретического предела скорости безошибочного информационного обмена, известного также как «граница Шеннона». Доказанным является факт приближения к указанной границе с точностью до 0,0045 дБ в условиях симметричного бинарного канала связи с аддитивным белым гауссовским шумом (АБГШ) [8].

В таких условиях проблема достижения максимальной скорости информационного обмена по каналам с шумом фактически уходит от задач кодирования и сводится к вопросам формирования сигналов с амплитудно-фазовыми структурами, обеспечивающими максимум количества информации I_{xy} , содержащейся в выходящих наблюдениях, которая, согласно второй асимптотической теореме Шеннона, определяет предельную скорость безошибочного информационного обмена [9].

Но показатель количества информации I_{xy} , а, следовательно, и «граница Шеннона», существенно зависит от ограничивающих условий, определяющих класс доступных сигналов. Указанные ограничения происходят как от физической природы канала связи, так и от доступных технологических решений.

На современном этапе развития радиосвязи ограничения, накладываемые на структуру сигналов, обусловлены, прежде всего, существующей технологией передающих устройств, а также применением цифровых методов модуляции и кодирования. Они приводят к ограничению пиковой мощности трансляции, которая не может быть выше заданного уровня, требующегося для правильной демодуляции и декодирования, либо по техническим причинам, либо из-за условия калибровки. Несмотря на это, на практике получила широкое распространение форма расчета предельной скорости информационного обмена, соответствующая случаю ограничения средней мощности сигнала. Объясняется это тем, что в указанном случае задача расчета «границы Шеннона» достаточно просто решается, а результаты формулируются в замкнутом лаконичном виде. При этом игнорируется, что ограничение средней мощности при решении однозначно приводит к требованию применять в качестве сигнала гауссовский случайный процесс, что не отвечает техническим возможностям. Но поскольку до недавнего времени эффективные методы кодирования, приближающие реальные скорости обмена вплотную к «границе Шеннона», не были разработаны, то возникающие неточности игнорировались, и указанный упрощенный подход использовался повсеместно.

Задача точного расчета предельной скорости информационного обмена («границы Шеннона») по каналу радиосвязи с учетом ограничений, отвечающих техническим реалиям, приобрела в последнее время особенную актуальность. Ее решение позволит ответить сразу на несколько вопросов:

- Какие ошибки имеют результаты, полученные по установившейся методике с предположением ограничения средней мощности сигнала?
- Какая амплитудно-фазовая сигнальная структура обеспечивает наивысшие показатели «границы Шеннона» в реальных условиях?
- На сколько снизятся результаты предельной скорости информационного обмена из-за более жестких реальных ограничений на структуру сигнала?
- Возможно ли усовершенствование известных методов модуляции-кодирования для достижения более высоких скоростей информационного обмена в реальных условиях?

Представленный материал посвящен решению задачи синтеза сигналов с оптимальной структурой. В следующей статье авторов будут представлены результаты анализа полученных результатов.

Уравнение входного сигнального распределения, обеспечивающего максимум пропускной способности

В работе [9] на с. 292 получено уравнение, задающее оптимальное непрерывное распределение входящего сигнала, используемого для информационного обмена по каналу с аддитивным стационарным шумом:

$$P(x) = e^{-\mu(-d/dx)} \exp\left(\beta a - C - H_z - \beta e^{-\mu(-d/dx)} c(x)\right), \quad (1)$$

где: $P(x)$ – оптимальное распределение входящего сигнала; $e^{-\mu(-d/dx)}$ – сложный оператор, получаемый путем подстановки простого оператора дифференцирования $-d/dx$ в качестве аргумента в стоящую (со знаком минус) в показателе экспоненты характеристическую функцию $\mu(s)$, которая определяется из характеристического уравнения $e^{\mu(s)} = \int e^{sz} p_0(z) dz$ для $p_0(z)$ (плотности вероятности распределения аддитивного шума в канале); β и C –

неопределенные множители, связанные с выполнением условий нормировки $\int P(x)dx = 1$ и технологических ограничений ; $\int c(x)P(x)dx \leq a$; $c(x)$ – функция штрафов, задающая технологические ограничения; H_z – энтропия распределения отдельного шумового отсчета.

В [9] доказано, что распределение $P(x)$, удовлетворяющее (1), обеспечивает максимум показателя количества информации I_{xy} и тем самым приводит к наибольшему достижимому значению предельной скорости информационного обмена по каналу с аддитивными шумами, имеющих плотность распределения $p_0(z)$, при условии выполнения технологических ограничений, накладываемых на входящие сигналы, вида:

$$\int c(x)P(x)dx \leq a. \quad (2)$$

На современном этапе развития техники радиосвязи условия работы, как отмечалось, предполагают ограничения:

- по пиковой мощности;
- в виде требований на портрет амплитудно-фазовой сигнальной структуры в пределах «квадрата».

Последний случай является характерным для цифрового обмена, когда информационный поток разделяется на два независимых, каждый из которых передается на одной из квадратурных компонент. Широкий перечень технических решений, например, кодирование Грея, схемы треллис-модуляции, OFDM-сигналы, сверточное, турбо и LDPC-кодирование и т.д., ориентированы именно на передачу цифровых потоков в режиме разделения по квадратурам [10, 11].

Функция штрафов $c(x)$, соответствующая указанным ограничениям, имеет вид:

$$1) c(x_p, x_q) = \begin{cases} 0, & \text{если } x_p^2 + x_q^2 \leq P_{top}, \\ \infty, & \text{если } x_p^2 + x_q^2 > P_{top}; \end{cases} \quad (3)$$

$$2) c(x_p, x_q) = \begin{cases} 0, & \text{если } x_p^2 \leq P_{top}/2 \text{ и } x_q^2 \leq P_{top}/2, \\ \infty, & \text{если } x_p^2 > P_{top}/2 \text{ или } x_q^2 > P_{top}/2, \end{cases} \quad (4)$$

где: P_{top} – пиковая мощность, допустимая в режиме передачи сигнала.

Функцию штрафов (4) можно переписать в более удобном для решения задачи виде:

$$c(x_p, x_q) = c_1(x_p) + c_1(x_q), \quad (5)$$

$$\text{где } c_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } |x| \leq \sqrt{P_{top}/2}, \\ \infty, & \text{если } |x| > \sqrt{P_{top}/2}. \end{cases} \quad (6)$$

В таком варианте (1) разделяется на два независимых уравнения:

$$\begin{cases} P_1(x_p) = e^{-\mu(-d/dx_p)} \exp(\beta a - C - H_z - \beta e^{-\mu(-d/dx_p)} c_1(x_p)), \\ P_1(x_q) = e^{-\mu(-d/dx_q)} \exp(\beta a - C - H_z - \beta e^{-\mu(-d/dx_q)} c_1(x_q)). \end{cases} \quad (7)$$

Каждое из указанных уравнений устанавливает искомое распределение для одной из сигнальных квадратурных компонент (P или Q). Общее распределение комплексного сигнального отсчета при этом можно получить путем вычисления произведения:

$$P(x_p, x_q) = P_1(x_p) P_1(x_q). \quad (8)$$

Функцию штрафов (3) представить через сумму штрафов за отдельные компоненты не

удаётся. Поэтому (1) нельзя разделить на независимые по x_p и x_Q уравнения. Решение придется искать в форме двумерного сигнального распределения $P(x_p, x_Q) = P(\vec{x})$. Но в данном случае размерность задачи тоже можно сократить до единицы, если принять во внимание то, что, в силу условий, решение должно быть симметричным относительно точки начала координат на сигнальной амплитудно-фазовой плоскости:

$$P(x_p, x_Q) = P(\vec{x}) = P(r), \quad (9)$$

где: $r = \sqrt{x_p^2 + x_Q^2}$. При этом оператор $e^{-\mu(-d/d\varphi)}$, возникающий при переводе (1) в полярные координаты, будет соответствовать тождественному и, следовательно, будет справедливо:

$$e^{-\mu(-d/dx_p, -d/dx_Q)} \rightarrow e^{-\mu(-d/dr, -d/d\varphi)} \rightarrow e^{-\mu(-d/dr)}.$$

Поэтому (1) в полярных координатах примет вид:

$$P(r) = e^{-\mu(-d/dr)} \exp(\beta a - C - H_z - \beta e^{-\mu(-d/dr)} c_1^+(r)), \quad (10)$$

$$\text{где: } c_1^+(r) = \begin{cases} 0, & \text{если } r \leq \sqrt{P_{top}}, \\ \infty, & \text{если } r > \sqrt{P_{top}}. \end{cases} \quad (11)$$

Итак, в обоих случаях решение задачи сводится к однотипным уравнениям (10) и (7) с единственным отличием, состоящим в том, что параметр r в (10) определен на полуоси неотрицательных действительных чисел, а параметры (x_p, x_Q) , присутствующие в (7), определены на всей оси действительных чисел.

Вид функций штрафа (6) и (11) позволяет выписать решения уравнений (7) и (10) непосредственно, без привлечения техники аналитических расчетов. Действительно, в области значений аргумента, где функция штрафа тождественно равна 0 действие операторов $e^{-\mu(-d/dr)} c_1^+(r)$ и $e^{-\mu(-d/dx)} c_1(x)$ также даст нулевой результат. Поэтому при ограничении пиковой мощности должно выполняться:

$$P(x_p, x_Q) = P(\vec{x}) = P(r) = const, \text{ при } r \leq \sqrt{P_{top}}$$

и при ограничениях квадратной формой должно выполняться:

$$P(x_p, x_Q) = P_1(x_p) P_1(x_Q) = const, \text{ при } |x_p| \leq \sqrt{P_{top}/2} \text{ и } |x_Q| \leq \sqrt{P_{top}/2}.$$

А в противном случае мы попадаем в область ограничений, которой должно выполняться однозначное условие:

$$P(x_p, x_Q) = P(\vec{x}) = P(r) = 0, \text{ при } r > \sqrt{P_{top}}$$

или

$$P(x_p, x_Q) = P_1(x_p) P_1(x_Q) = 0, \text{ если } |x_p| > \sqrt{P_{top}/2} \text{ или } |x_Q| > \sqrt{P_{top}/2}.$$

Фактически мы получили решение поставленной задачи в рамках методики, предложенной в [9]. Но, к сожалению, есть одно важное обстоятельство, которое в [9] было только упомянуто, а в нашем случае требует отдельной проработки и, как показано ниже, заметно усложняет решение. Отмеченный момент связан с условием того, что искомая сигнальная плотность вероятности $P(x)$, удовлетворяющая (1), должна быть строго положительной. Области нулевых значений (где $P(x) \equiv 0$) уравнение (1) не определяет. Автор разработанной в [9] методики ограничился рассмотрением только таких случаев и примеров, в которых наличие областей сигнального распределения с нулевой вероятностью заведомо приводит к неоптимальным решениям. Поэтому вопрос определения (расчета) указанных областей остался без должной проработки. Но в рассматриваемой задаче наличие на

сигнальной амплитудно-фазовой плоскости областей нулевой вероятности приводит к существенной коррекции результатов и в определенных условиях может заметно повышать «границу Шеннона». Выполним расчет таких областей.

Задача поиска «областей нулевой вероятности» существенно упрощается тем, что размерность плотности вероятности искомого сигнального распределения равна единице. Ниже доказано¹, если и существует «область нулевой вероятности», то она может быть только одна. Таким образом, нужно лишь определить граничные точки «области нулевой вероятности» и задача будет решена. При этом не вызывает сомнений то, что у оптимальных сигнальных распределений «область нулевой вероятности» должна концентрироваться в окрестности малых значений аргумента (малые $|x|$ или малые r). В противном случае оптимальным являлось бы равномерное сигнальное распределение, в котором ограничение пиковой мощности производится по границе более низкой, чем P_{top} , что противоречит физическому смыслу. Действительно, уменьшение отношения сигнал/шум в одностипных условиях не может приводить к увеличению «границы Шеннона».

¹Докажем возможность наличия не более одной «области нулевой вероятности» методом «от противного». Предположим, что оптимальное распределение входящего сигнала имеет сечение, вид которого показан на рис. П.1.

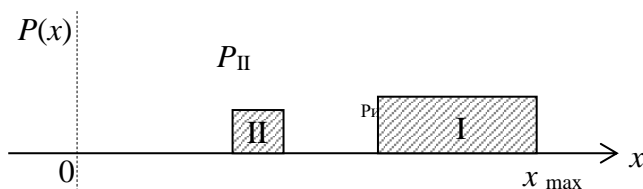


Рисунок П.1

Согласно уравнению (1), в областях ненулевых значений I и II плотность вероятности $P(x)$ должна сохранять постоянное значение. Поэтому будем предполагать выполненными следующие два условия:

- уровень плотности вероятности во внутренней ненулевой области II больше 0 ($P_2 > 0$);
- между ненулевыми областями I и II присутствует область нулевых значений с $P(x) \equiv 0$.

Покажем, что по крайней мере одно из указанных двух условий для оптимального распределения будет нарушено. Для этого рассмотрим вариацию $\Delta P(x)$ распределения $P(x)$ в пределах области II вида, приведенного на рис. П.2.

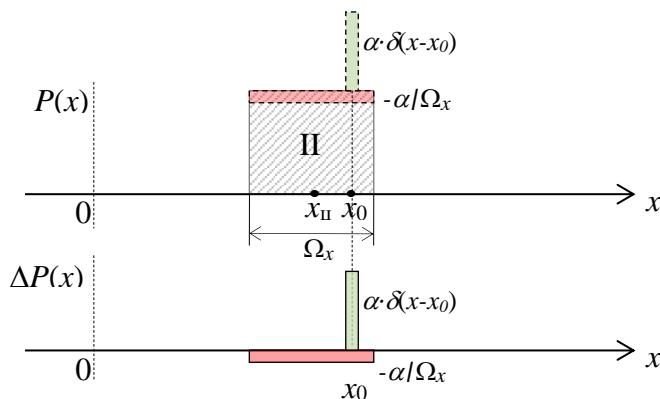


Рисунок П.2

Вариация

$$\Delta P(x) = \alpha \cdot \delta(x - x_0) - \frac{\alpha}{\Omega_x} \cdot \mathbf{1}_{\Omega_x}(x), \tag{П.1}$$

где: $\mathbf{1}_{\Omega_x}(x)$ – индикаторная функция области «II», принимающая значение 1 на множестве значений

аргумента области «П» и значение 0 для всех остальных значений аргумента, специально сформирована так, чтобы интеграл $\int \Delta P(x) dx$ обращался в 0 и выполнялось условие нормировки

$$\int (P(x) + \Delta P(x)) dx = \int P(x) dx = 1.$$

Распределение выходящего сигнала при этом претерпит вариацию:

$$\Delta P_Y(y) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \int_{\Omega_x} \Delta P(x) e^{-\frac{(y-x)^2}{2\sigma^2}} dx, \quad (\text{П.2})$$

для которой тоже будет выполняться условие $\int \Delta P_Y(y) dy = 0$. Поэтому изменение энтропии распределения сигнала на выходе, возникающее при вариации $\Delta P_Y(y)$ будет следующим:

$$\begin{aligned} \Delta H_Y &= -\int (P_Y(y) + \Delta P_Y(y)) \cdot \ln(P_Y(y) + \Delta P_Y(y)) dy + \int P_Y(y) \cdot \ln P_Y(y) dy = \\ &= -\int \Delta P_Y(y) dy - \int \Delta P_Y(y) \cdot \ln P_Y(y) dy = \\ &= -\int \Delta P_Y(y) \cdot \ln P_Y(y) dy = 0 \end{aligned} \quad (\text{П.3})$$

Оно равно 0 в силу предположения об оптимальности. Указанное условие равенства нулю должно выполняться для всех вариаций вида (2), формируемых из (1) при произвольном выборе точки x_0 в пределах отрезка Ω_x .

Обозначим через $y_{ц}$ точку распределения сигнала на выходе, в которую при отсутствии шума переходит входящая сигнальная позиция $x_{ц}$. Рассмотрим разложение в ряд Тейлора в точке $y_{ц}$ функции $\ln P_Y(y)$:

$$\ln P_Y(y) = I_Y^0 + \sum_i I_Y^1 i (y_i - y_{ц i}) + \sum_i \sum_{i_2} I_Y^2 i, i_2 (y_i - y_{ц i})(y_{i_2} - y_{ц i_2}) + \dots$$

Его подстановка в (3) показывает, что равенство 0 при произвольном выборе точки x_0 , в силу полноты системы ортогональных полиномов Эрмита [13], может быть выполнено только если:

$$I_Y^k i_1, i_2, \dots, i_k = 0, \text{ для } k > 0.$$

Откуда, опять же в силу полноты системы ортогональных полиномов Эрмита следует, что при формальном разложении в ряд Тейлора в точке $x_{ц}$ функции $P(x)$:

$$P(x) = P_0 + \sum_i P_1 i (x_i - x_{ц i}) + \sum_i \sum_{i_2} P_2 i, i_2 (x_i - x_{ц i})(x_{i_2} - x_{ц i_2}) + \dots$$

все коэффициенты $P_k i_1, i_2, \dots, i_k$ при $k > 0$ должны обращаться в 0. Следовательно между областями «П» и «Г» не может быть «область нулевой вероятности», так как $P(x)$ должно сохранять заданное постоянное значение $P_{ц}$. Следовательно, условие «2» будет нарушено. Единственный способ выполнить условие «2» состоит в выборе $P_{ц} = 0$. Но в таком случае будет нарушено условие «1». Это завершает доказательство возможности присутствия в оптимальном распределении сигнала на входе $P(x)$ не более одной «области нулевой вероятности».

Чтобы найти указанные граничные точки достаточно:

А) Задаться распределениями входящего сигнала:

$$1) P(r) = \begin{cases} \frac{1}{\pi(1-a^2)}, & \text{при } r \in [a, 1], \\ 0, & \text{при } r \in [0, a), \end{cases} \quad \text{— при ограничении пикового уровня,}$$

и

$$2) P_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{2(1-a)}, & \text{при } x \in [-1, -a] \cup [a, 1], \\ 0, & \text{при } x \in (-a, +a), \end{cases} \quad \text{— при ограничениях «квадратом»,}$$

для набора значений границы a из интервала $[0, 1]$.

Б) Вычислить плотности вероятностей для выходящего сигнала (для смеси сигнала и гауссовского шума) по формулам:

1)

$$W(R, a) = \int_0^1 rP(r) \cdot e^{-\frac{R^2+r^2}{2\sigma^2}} I_0\left(\frac{Rr}{\sigma^2}\right) dr =$$

$$= \frac{1-z}{2\pi(1-a^2)\sigma^2} e^{-\frac{1-z}{2}\frac{R^2}{\sigma^2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n+1} L_n^0\left(\frac{1-z}{2}\frac{R^2}{\sigma^2}\right) \left\{ L_n^1\left(\frac{1-z}{2z}\frac{1}{\sigma^2}\right) - a^2 L_n^1\left(\frac{1-z}{2z}\frac{a^2}{\sigma^2}\right) \right\}, \quad (12)$$

где: $I_0(\cdot)$ – модифицированная функция Бесселя нулевого порядка, $R = \sqrt{y_P^2 + y_Q^2}$ – амплитуда сигнала на выходе канала, y_P, y_Q – квадратурные сигнальные отсчеты на выходе канала связи, нормированные на $\sqrt{P_{top}}$, $L_n^0(\cdot), L_n^1(\cdot)$ – полиномы Лагерра с индексами 0 и 1,

$2 \cdot \sigma^2 = \frac{P_{noise}}{P_{top}} = \frac{2S_{noise}^2}{P_{top}}$ – уровень канального гауссовского шума, выраженный в единицах

пиковой мощности, z – произвольный параметр, выбираемый в пределах от $\frac{1}{2}$ до $1-\varepsilon$, связанный с двумерной генерирующей функцией Хилле-Харди [12, с. 189], который следует выбирать исходя из вычислительных затрат при численных расчетах. При выводе последнего равенства (12) использовались известные соотношения для полиномов Лагерра, приведенные в [12] под номерами формул 16 и 23 на с. 189-190;

2)

$$W(y_P, y_Q, a) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} P_1(u_P) e^{-\frac{(y_P-u_P)^2}{2\sigma^2}} du_P \right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} P_1(u_Q) e^{-\frac{(y_Q-u_Q)^2}{2\sigma^2}} du_Q \right) =$$

$$= W_1(y_P, a) \cdot W_1(y_Q, a),$$

$$\text{где: } W_1(u, a) = \frac{1}{2(1-a)} \left(\Phi\left(\frac{u+1}{\sigma}\right) + \Phi\left(\frac{u-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{u-1}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{u+a}{\sigma}\right) \right), \quad (14)$$

$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^u e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ – функция интеграла ошибок, u_P, u_Q, y_P, y_Q – квадратурные отсчеты

сигнала на входе и выходе канала связи, нормированные на уровень $\sqrt{P_{top}/2}$,

$\sigma^2 = \frac{P_{noise}}{P_{top}} = \frac{2S_{noise}^2}{P_{top}}$ – уровень канального гауссовского шума, выраженный в единицах пиковой

мощности (здесь нет множителя 2 перед σ^2 , т.к. нормируется на 1 боковая полусторона квадрата, а не полудиагональ).

В) Численными методами найти энтропию распределений (12) и (13):

$$1) H_{top}(a) = -2\pi \int_0^{\infty} R \cdot W(R, a) \ln(W(R, a)) dR, \quad (15)$$

где: $W(R, a)$ – плотность, задаваемая формулой (12);

$$2) H_{\square}(a) = -4 \int_0^{\infty} W_1(u, a) \ln(W_1(u, a)) du, \quad (16)$$

где: $W_1(u, a)$ – плотность, задаваемая формулой (14).

Г) С использованием интерполяционных соотношений вычислить значения a , обеспечивающие наибольшие значения количества информации [9], рассчитываемые по

формулам:

$$1) I_{XY \text{ top}}(a) = H_{\text{top}}(a) - (1 + \ln(2\pi\sigma^2)); \quad (17)$$

$$2) I_{XY \square}(a) = H_{\square}(a) - (1 + \ln(2\pi\sigma^2)). \quad (18)$$

В результате будут найдены не только наилучшие амплитудно-фазовые сигнальные структуры, но и предельные показатели для скорости информационного обмена («граница Шеннона») в условиях технологических ограничений по пиковой мощности и по портрету (квадратной формы) структуры.

Д) Провести сопоставление (17) и (18) с формулами Шеннона, задающими предельную скорость информационного обмена в условиях ограничения средней мощности сигнала:

$$1) I_{XY \text{ med}} = \ln\left(1 + \frac{1+a^2}{4\sigma^2}\right) - \quad (19)$$

когда средняя мощность рассчитывается для режима пиковых ограничений;

$$2) I_{XY \text{ med}} = \ln\left(1 + \frac{1+a+a^2}{3\sigma^2}\right) - \quad (20)$$

когда средняя мощность рассчитывается для режима ограничений по портрету (квадратной формы).

Нужно отметить, что в (19) и (20) используется натуральный логарифм, и «граница Шеннона» имеет размерность [нат/с/Гц], а не [бит/с/Гц]. Но пересчет между указанными шкалами не представляет никаких затруднений.

В результате получим выражение для погрешности традиционной формулы Шеннона в условиях ограничений по пиковой мощности (и по портрету амплитудно-фазовой структуры) в приближении одной «области нулевой вероятности».

Численное решение задачи формирования оптимального сигнального распределения

Решение задачи по указанным в предыдущем разделе пунктам выполнялось с привлечением численных методов. Определенные затруднения возникли при расчетах распределения (12). Оказалось, что в различных диапазонах изменения уровня шума ($\frac{1}{2\sigma^2}$) для

обеспечения сходимости ряда следует использовать различные значения параметра z . В таблице 1 приведены указанные значения z , позволяющие обеспечить сходимость при приемлемых вычислительных затратах. Как можно видеть, с уменьшением уровня шума (с ростом отношения $\frac{1}{2\sigma^2}$) сходимость обеспечивается при выборе значений z , очень близких к

1, а при увеличении уровня шума (уменьшении отношения $\frac{1}{2\sigma^2}$) лучше использовать значения z , близкие к $\frac{1}{2}$. При уровнях шума менее -57 дБ ряд расходился при любых z и требовалось прямое вычисление интегралов, что чрезмерно увеличивало вычислительные затраты.

Значения z , обеспечивающие сходимость формулы (12), приведены в табл. 1.

Таблица 1.

$1/(2\sigma^2)$ (дБ)	z
(-80, -3]	1/2
(-3, 29]	3/4
(29, 35]	19/20
(35, 43]	99/100
(43, 53]	699/700
(53, 57]	4999/5000

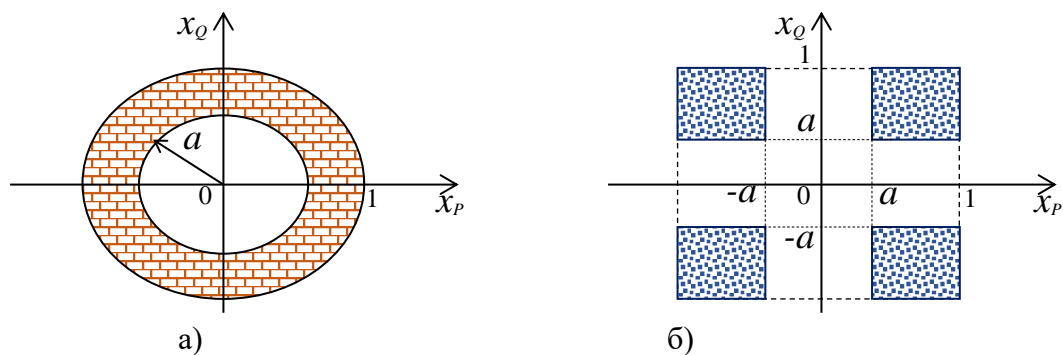


Рисунок 1

На рис. 1а, 1б показаны амплитудно-фазовые структуры входящих сигналов, в рамках которых содержатся оптимальные решения, обеспечивающие максимум скорости информационного обмена в условиях ограничений пиковой мощности передачи и ограничений сигнального портрета «квадратной формой».

Во второй статье, посвященной численным расчетам, будут приведены подробные результаты анализа полученного решения, выполненные в соответствии с пунктами «В-Д» представленного выше плана исследований.

Заключение

Получены точные решения второй вариационной задачи Шеннона в условиях ограничений, характерных для современных технологий передающих устройств и цифровых методов приема. В результате удалось синтезировать оптимальные амплитудно-фазовые сигнальные конструкции на классе непрерывных распределений, обеспечивающие максимальные показатели количества информации на отсчет, которые, согласно теореме Шеннона, устанавливают предельную скорость информационного обмена по каналу связи в указанных условиях.

Литература

1. Володина Е.Е., Кухаренко Е.Г., Салютин Т.Ю. Экономические основы функционирования инфокоммуникационной компании // Экономика и качество систем связи, 2017. – № 4 (6). – С. 3-9.
2. Шорин О.А., Щучкин В.М. Использование интеллектуальных антенн в системах мобильной связи для снижения перегрузок // Труды МАИ, 2012. – № 53. – С. 19.
3. Шорин О.А., Аверьянов Р.С. Оценка уровня интерференций для сигналов с OFDM-модуляцией // Электросвязь, 2015. – № 12. – С. 55-59.
4. Шорин О.А. Методы оптимального распределения частотно-временного ресурса в системах подвижной радиосвязи / Диссертация на соискание ученой степени д.т.н.: 05.12.13. – Москва, 2005. – 351 с.
5. Косинов М.И., Шорин О.А. Повышение емкости сотовой системы связи при использовании зон перекрытия // Электросвязь, 2003. – № 3.
6. Шорин О.А., Орехов А.А., Шорин А.О. Качество обслуживания вызовов в сотовых системах связи с учетом замираний // Вестник РАЕН, 2009. – Т. 9. – № 2. – С.57.
7. Шорин О.А. Вероятность перегрузки сотовых систем связи с учетом подвижности абонентов // Электросвязь, 2004. – № 5.
8. Chung S.Y., Forney G.D., Richardson T.J., Urbanke R.L. On the Design of Low-Density Parity-Check Codes within 0.0045 dB of the Shannon Limit // IEEE Communications Letters – February 2001. – Vol. 5, – № 2. – P. 58-60.
9. Стратонович Р.Л. Теория Информации. – М.: «Советское радио», 1975. – 424 с.
10. Прокис Дж. Цифровая связь. М.: Радио и связь, 2000. – 800 с.
11. Скляр Б. Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение. – М.:

Издательский дом «Вильямс», 2003. – 1104 с.

12. Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F.G. Higher Transcendental Functions. Vol. 2 / McGraw-Hill Book Company, Inc., 1953. – P. 396.

13. Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные функции. – М.: «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, 1984. – 384 с.