

ОПТИМАЛЬНАЯ СТРУКТУРА ДИСКРЕТНОЙ QAM-МОДУЛЯЦИИ, ОБЕСПЕЧИВАЮЩАЯ МАКСИМУМ ИНФОРМАЦИОННОЙ ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ РАДИОКАНАЛА

О.А. Шорин, Генеральный директор, профессор, д.т.н., ООО «НСТТ», 115432, 2-й Кожуховский проезд, 12 стр. 2, oshorin@gmail.com;

Г.О. Бокк, директор по науке, д.т.н., ООО «НСТТ», 115432, 2-й Кожуховский проезд, 12 стр. 2, bgo@nxtt.org

УДК 621.391: 621.396

Аннотация. С помощью методов моделирования выполнен расчет оптимальной структуры дискретной QAM-модуляции, обеспечивающей максимальное значение границы Шеннона для скорости информационного обмена по радиоканалу с гауссовским белым шумом. Результаты получены в условиях ограничения, накладываемого на пиковую мощность сигнала. Исследовались варианты всевозможных расположений точек созвездия модуляции и всевозможных распределений вероятности на указанных точках. Результаты позволили установить граничные значения сигнал/шум, при которых целесообразно изменять количество точек применяемого созвездия QAM-модуляции.

Ключевые слова: граница Шеннона; модуляция; радиоканал; пиковая мощность; QAM-модуляция.

THE OPTIMAL STRUCTURE OF DISCRETE QAM MODULATION, PROVIDING THE MAXIMUM OF THE RADIO CHANNEL INFORMATION CAPACITY

Oleg Shorin, General director of LLC «NXTT», professor, doctor of technical sciences, 115432, 2-i Kozhukhovsky proezd 12, str. 2;

German Bokk, director of science of LLC «NXTT», doctor of technical sciences, 115432, 2-i Kozhukhovsky proezd 12, str. 2.

Annotation. The optimal structure of discrete QAM modulation was calculated using the simulation methods, which provides the maximum value of the Shannon border for the speed of information exchange over the radio channel with Gaussian white noise. The results were obtained under conditions of the limitations imposed on the peak signal power. We investigated the options of various locations of the constellation points of modulation and all kinds of probability distributions on the points indicated. The results allowed us to establish the signal-to-noise boundary values at which it is advisable to change the number of points of the used QAM-modulation constellation.

Keywords: shannon border; modulation; radio channel; peak power; QAM modulation.

Введение

Повышение пропускной способности радиоканала является одной из актуальных задач современности. При этом теоремы Шеннона [1] позволили установить теоретические границы достижимой пропускной способности радиоканала при ограничениях, накладываемых как на сигнальные характеристики, так и уровень шума. Но общие аналитические соотношения представляют сложные уравнения, задающие в неявном виде требования на структуру сигнала и предельную пропускную способность. Только для ряда конкретных условий пока удалось найти точные решения. Наибольшее распространение среди ситуаций точного решения получил случай гауссовского сигнала для канала с белым гауссовским шумом при ограничениях, накладываемых на среднюю мощность трансляции. Именно ему соответствует

широко утвердившаяся формула границы Шеннона для пропускной способности радиоканала [1, 2]:

$$C = \Pi \log_2(1 + P_s/P_N), \quad (1)$$

где: C – предельная пропускная способность радиоканала в режиме безошибочной передачи данных, измеряемая в бит/с, Π – ширина полосы радиоканала, измеряемая в Гц, P_s и P_N – мощность полезного сигнала и мощность шума, соответственно, наблюдаемые в точке приема. Сразу нужно указать, что формула (1) на самом деле представляет частный случай применения теоремы Шеннона о передаче информации по каналу связи с шумом. И в конкретных ситуациях может давать не верный результат. Особый интерес в плане уточнения границы Шеннона и оптимальных сигнальных конструкций, обеспечивающих ее достижение, представляет случай применения дискретной *QAM*-модуляции при ограничении на пиковую мощность трансляции. Объясняется это широким распространением *QAM*-модуляции на практике из-за рационального технологического метода переноса информации и достаточно эффективного способа селекции ортогональных квадратурных I и Q каналов полезного сигнала при минимуме вычислительных затрат.

Ограниченность известного метода решения задачи Шеннона для сигналов с дискретной модуляцией

Методы решения задачи Шеннона для определения сигналов, обладающих максимальной информационной емкостью и поэтому обеспечивающих максимальную пропускную способность радиоканала, разработанные Р. Стратоновичем [1], ориентированы либо на случаи непрерывной модуляции сигнала в непрерывном канале связи, либо на случаи дискретной модуляции в дискретном канале связи. На практике же в подавляющем большинстве случаев приходится иметь дело с сигналами дискретной модуляции, передаваемыми по непрерывному каналу связи. Методика Р. Стратоновича в обоих случаях оказывается непригодной. Так в случае дискретной модуляции и дискретного канала связи требуется сформировать обратную матрицу вероятностных переходов, что невозможно, а в случае непрерывных каналов и непрерывной модуляции решение становится неоднозначным.

Поясним последнюю ситуацию на примере случая с ограничением пиковой мощности полезного сигнала.

В таких условиях оптимальное непрерывное распределение сигнальных позиций на квадратурной плоскости, согласно результатам, полученным Р. Стратоновичем, должно удовлетворять операторному уравнению:

$$P(x) = e^{-\mu(-d/dx)} \exp(\beta a - C - H_z - \beta e^{-\mu(-d/dx)} c(x)), \quad (2)$$

где: $P(x)$ – оптимальное распределение входящего сигнала, $e^{-\mu(-d/dx)}$ – сложный оператор, получаемый путем подстановки простого оператора дифференцирования $-d/dx$ в качестве аргумента в стоящую (со знаком минус) в показателе экспоненты характеристическую функцию $\mu(s)$, которая определяется из характеристического уравнения $e^{\mu(s)} = \int e^{sz} p_0(z) dz$, для $p_0(z)$ (плотность вероятности распределения аддитивного шума в канале), β и C – неопределенные множители, связанные с выполнением условий нормировки $\int P(x) dx = 1$ и технологических ограничений $\int c(x) P(x) dx \leq a$, $c(x)$ – функция штрафов, задающая технологические ограничения, H_z – энтропия распределения отдельного шумового отсчета. Пиковые ограничения мощности сигнала приводят к тому, что в области непрерывности распределения сигнала должно выполняться $P(x) = const$, при $\|x\| \leq P_{top}$ и $P(x) = 0$, при $\|x\| > P_{top}$. Но если такое решение (2)

перенести на области с дискретным сигнальным распределением на квадратурной плоскости, то путем простых рассуждений мы приходим к противоречию (неоднозначности решения).

Во-первых, мы можем обеспечить требование решения Р. Стратоновича о равенстве $P(x) = const = p_0$, при $\|x\| \leq P_{top}$ для каждой дискретной микро-позиции дискретного сигнального созвездия.

Во-вторых, предполагая произвольным число дискретных микро-позиций сигнального созвездия, мы можем добиться произвольной концентрации указанных дискретных сигнальных микро-позиций в окрестностях отдельных точек на квадратурной сигнальной плоскости.

В-третьих, расчет вероятности использования в качестве рабочего состояния конкретной точки концентрации i дает выражение:

$$P(x_i) = \sum_{j=k_{i1}}^{k_{iN_i}} p_0 = N_i p_0, \quad i = 1, 2, \dots, M, \quad (3)$$

где: $k_{i1}, k_{i2}, \dots, k_{iN_i}$ – номера микро-позиций сигнального созвездия в окрестности точки x_i , M -число точек концентрации. Так как числа N_i ($i = 1, 2, \dots, M$), задающие числа концентрирующихся микро-позиций произвольны, то мы, с одной стороны, в пределе можем получить любое дискретное распределение для сигнальных позиций в области $\|x\| \leq P_{top}$, и, с другой стороны, удовлетворить решению (2). В результате получаем подтверждение того, что уравнение (2) не позволяет получить решение в случаях дискретной модуляции при передаче по непрерывным каналам.

Разработка математического метода синтеза оптимальной сигнальной структуры с дискретной модуляцией, обладающую наибольшим количеством информации, представляет серьезную научную проблему. Возможно, она будет решена в недалеком будущем. Но в текущий момент есть насущная потребность в получении подобных результатов для ряда важных частных случаев, наиболее характерных для систем радиосвязи, построенных в соответствии с достижениями современной технологии. В такой постановке для решения задачи синтеза оптимизированных структур дискретной модуляции могут быть применены вычислительные методы и моделирование.

Оптимизация структуры созвездия QAM-модуляции с помощью вычислительных методов

Наиболее простым с точки зрения понимания и интерпретации результатов является метод прямого перебора сигнальных структур с дискретной модуляцией. При этом расчет количества информации для каждой из таких сигнальных структур должен использоваться в качестве меры, задающей предпочтение. Максимальное значение количества информации определяет в качестве наилучшей ту структуру, которая обеспечила указанный показатель. Но вычислительные процедуры с прямым перебором обладают одним фундаментальным недостатком. Они, как правило, обладают экспоненциальной зависимостью вычислительной сложности от размерности пространства параметров (факторов) в котором осуществляют поиск оптимальной позиции. На данный момент идут интенсивные поиски мирового научного сообщества по созданию новых технологий и вычислительных методов, которые бы могли разрешить фундаментальную проблему экспоненциальной сложности алгоритмов, которые на современном этапе нельзя построить иным способом, чем на основе прямого перебора [3, 4]. Определенные успехи связаны с построением квантовых вычислительных устройств и квантовых алгоритмов вычислений, основанных на технологии «квантового отжига» [5, 6]. Но такой подход требует пересмотра всей идеологии современных вычислительных алгоритмов и даже некоторых математических основ. И пока успехи, связанные с его применением чрезвычайно скромны, чтобы ими можно было воспользоваться широким слоем пользователей и разработчиков для решения более или менее значимого спектра технических задач. В этом смысле задача синтеза оптимальной сигнальной структуры с дискретной модуляцией не

является счастливым исключением. При ее решении приходится считаться с ограниченными вычислительными возможностями и активно использовать определенные ограничения, накладываемые на класс возможных сигнальных структур. Естественно, в качестве ограничений использовать те технологические особенности, которые на современном этапе развития электроники и связи применяются при генерации сигналов.

Повсеместное бурное внедрение методов цифровой обработки и цифровой передачи информации, возникшее в последнее десятилетие, предопределило массовый переход от аналоговых схем модуляции к цифровым. При этом сам перечень типов и структур, используемых для дискретной цифровой модуляции, остается весьма ограниченным. Фактически в радиосвязи реально используются структуры модуляции *QPSK*, *PSK-8*, *QAM-16* и *QAM-64* с некоторыми вариациями. Модуляции *QAM-32* и *QAM-128* не нашли широкого применения по причине отсутствия для них кода Грея, обеспечивающего искажение одного бита при ошибочной демодуляции соседних символов. Кроме того, начиная с модуляции *QAM-128* и выше, серьезным препятствием к применению начинают выступать межсимвольные искажения, порождаемые условием ограниченной рабочей полосы, повсеместно существующим в радиочастотной части спектра, погрешностями работы схем синхронизации (по частоте/задержке), а также нестабильными условиями распространения. Более редко используются двух-кольцевые и трех-кольцевые схемы дискретной модуляции с числом точек созвездия равным 16 или 32 [2, 7].

На этом основании представляется целесообразным начать решение поставленной задачи с наиболее широко используемого класса сигналов с дискретной модуляцией под общим названием «*QAM*». Для указанного класса предполагается использование созвездий с симметричным расположением сигнальных точек относительно осей на плоскости квадратурных отсчетов, располагающихся во внутренней зоне квадрата с центром в позиции начала координат. Техническое предпочтение к таким структурам вызвано свойством повышенной устойчивости работы в режиме фазо-частотной синхронизации и простотой декодирования информации. Кроме того, сигналы с *QAM*-модуляцией, если они корректно применяются для передачи информации, обладают свойством статистической независимости распределений проекций используемых позиций созвездия модуляции на оси синфазной (*I*) и ортогональной (*Q*) квадратурных компонент. Свойство статистической независимости и симметричности позволяет существенно сократить размерность пространства прямого перебора. Так, если бы мы решали задачу для общего случая расположения позиций созвездия, то объем вычислений определялся бы величиной порядка:

$$N \sim \frac{1}{(m-1)!} (D/\Delta)^{2(m-1)} \frac{1}{(m-1)!} (1/\Delta p)^{m-1}, \quad (4)$$

где: *D* – линейный размер (диаметр) допустимой области расположения сигнальных точек созвездия дискретной модуляции на квадратурной плоскости, Δ – шаг дискретного перебора позиций расположений, используемый в алгоритме, *m* – максимальное число точек, которое может быть в созвездии модуляции, Δp – шаг дискретного перебора вероятностей дискретного распределения, связанного с правилом использования точек созвездия в качестве рабочих позиций. Знаменатель $(m-1)!$ в первом сомножителе возник из-за того, что перестановки точек созвездия без изменения их местоположения не изменяют информационные свойства сигнала. Уменьшение параметра *m* на 1, присутствующее в первых двух сомножителях (4) связано с тем, что первую позицию без ограничения общности всегда можно зафиксировать на максимально допустимом расстоянии от начала координат по любой из осей. При полном переборе вероятностей дискретного распределения должно выполняться условие $p_1 + p_2 + \dots + p_m = 1$, это объясняет появление третьего сомножителя $1/(m-1)!$ в (4).

Соотношение (2) показывает, что полный перебор вариантов становится практически неосуществимым для современных вычислительных средств уже при $m \geq 7$. Но если задаться классом *QAM* сигналов, то перебор можно осуществлять только по одной координате

квадратурной плоскости и только для половины проекционных позиций. Другая половина позиций при этом будет формироваться простым дополнением точек с такими же по значению, но противоположным по знаку координатами. А информационная емкость *QAM*-сигнала с расположением точек созвездия на плоскости может быть получена простым суммированием информационной емкости сигнала с расположением точек на одной оси (выбор такой оси произволен при проведении вычислительной процедуры). Последнее обстоятельство объясняется тем, что при статистически независимом распределении проекций точек на квадратурные оси достигается максимальная информационная емкость сигнала [1], которая равна сумме количеств информации, содержащихся в квадратурных сигнальных составляющих. В результате объем вычислительных затрат можно оценить так:

$$N \sim \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{m}}{2} - 1\right)!} (D/(2\Delta))^{\frac{\sqrt{m}}{2}-1} \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{m}}{2} - 1\right)!} (1/(2\Delta p))^{\frac{\sqrt{m}}{2}-1}, \quad (5)$$

что, для $m=64$ (*QAM-64*), $D/(2\Delta) = 100$, $1/(2\Delta p) = 100$ дает оценку вычислительных затрат $N \sim 3 \times 10^{10}$ циклов на позицию заданного уровня $P_{s \max}/P_N$. Для ПК с *CPU intel core i3*, с тактовой частотой 3,7 МГц это позволило даже без оптимизации кода проводить расчет за 30-35 мин на одну позицию P_{top}/P_{noise} . Правда нужно отметить, что для дополнительного снижения вычислительных затрат в программе использовался трех-проходной алгоритм перебора с последовательным сужением области поиска и одновременным уменьшением шага перебора.

В результате каждая структура сигнального созвездия, принадлежащая к классу производных от исходного типа *QAM-64*, однозначно определялась параметрами одномерного дискретного распределения с параметрами x_1, x_2, x_3 , однозначно задающими положения позиций, и вероятностями p_1, p_2, p_3 , однозначно задающими статистику. Еще раз нужно отметить, что координаты крайних точек одномерного распределения всегда ± 1 , а вероятности $0,5 - p_1 - p_2 - p_3$. Поэтому 6 параметров достаточно для полного описания.

Информационная емкость каждой квадратурной составляющей рассчитывалась по известной формуле [1].

$$I_S = H_{S+N} - H_N, \quad (6)$$

где:

I_S – информационная емкость, содержащаяся в одном квадратурном символе (бит/символ);

$$H_{S+N} = -\frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_0^{+\infty} \left\{ \sum_{i=1}^4 p_i \left(e^{-\frac{(u+x_i)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(u-x_i)^2}{2\sigma^2}} \right) \right\} \times \log_2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \sum_{i=1}^4 p_i \left(e^{-\frac{(u+x_i)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(u-x_i)^2}{2\sigma^2}} \right) \right\} du \quad (7)$$

энтропия распределения отдельного квадратурного наблюдения в точке приема (смесь квадратурного сигнала и шума);

$$H_N = -\frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} \log_2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} \right\} du = \frac{1}{2} \log_2(2\pi e) + \frac{1}{2} \log_2(\sigma^2) - \quad (8)$$

энтропия распределения шумовой компоненты в квадратурном канале в точке приема; значения в суммах для $i=4$ в (7) следующие: $p_4 = 0,5 - p_1 - p_2 - p_3$, $x_4 = 1$;

$\frac{1}{\sigma^2}$ – параметр, определяемый отношением пиковой мощности сигнала к мощности шума $\frac{P_{top}}{P_{noise}}$

в точке приема.

Соотношение (7) показывает, что переход к расчетам на базе одномерного распределения квадратуры позволяет избежать роста вычислительных затрат, связанных с необходимостью вычисления двумерных интегралов на сигнальной квадратурной плоскости.

Информационная емкость для всего сигнала может быть получена путем простого удвоения результата, даваемого формулой (6). Конечно, это справедливо только для множества сигналов QAM, обладающих «квадратной» формой зоны расположения точек созвездия модуляции, включающего подмножество сигналов со статистически независимым поведением квадратурных компонент, обладающих наибольшей информационной емкостью относительно других элементов исходного множества.

В (7-8) преобразование логарифма выполнено по основанию 2, чтобы результат (6) выражался в привычных для инженеров связи единицах – битах.

Результаты вычисления оптимальных созвездий QAM-модуляции

Результаты, полученные путем вычислений для оптимальных значений параметров x_1 , p_1 , x_2 , p_2 , x_3 , p_3 и x_4 , p_4 приведены на рисунках 1а-1г, соответственно.

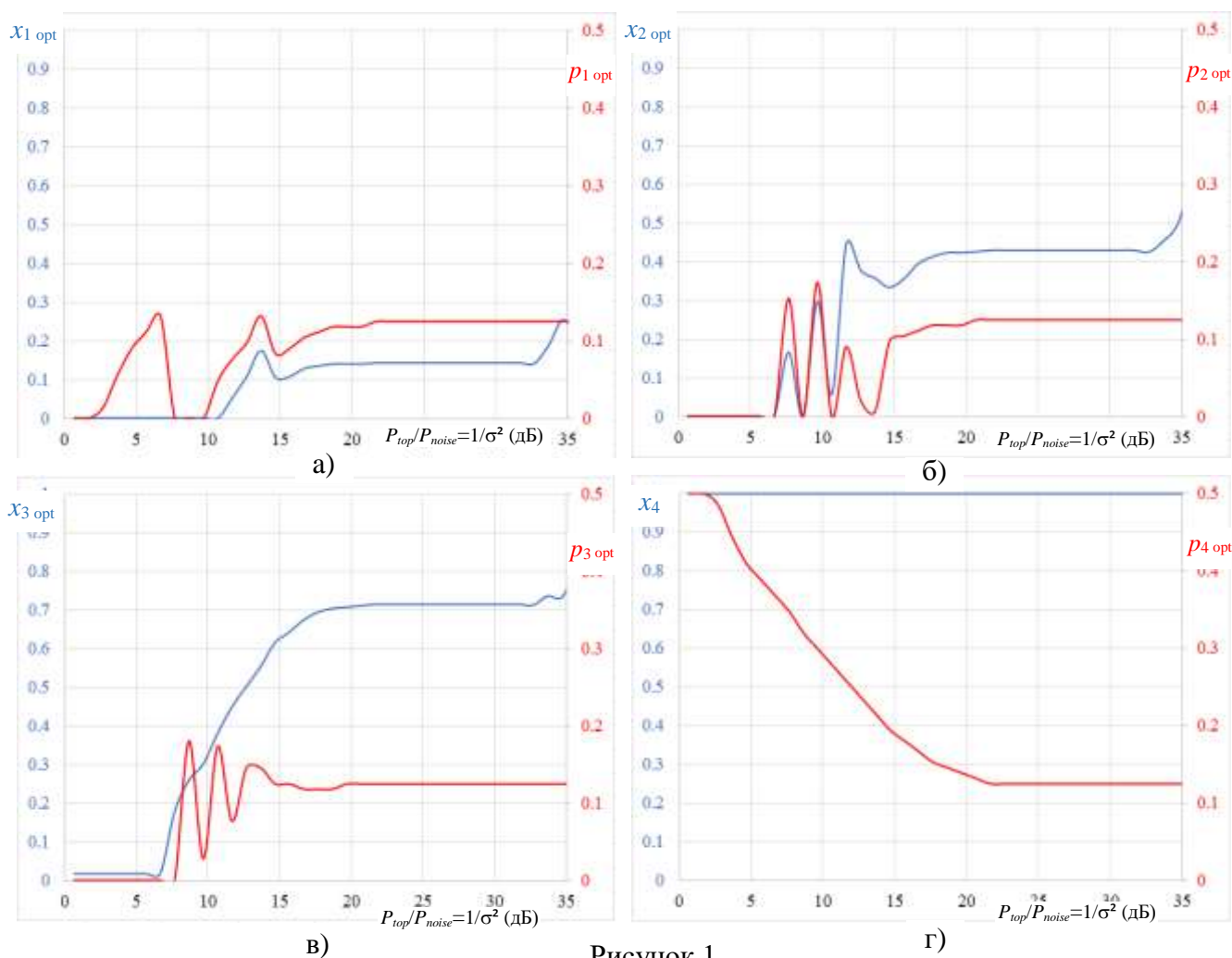


Рисунок 1

Можно видеть, что в области значений P_{top}/P_{noise} от 6 до 14 дБ возникает ряд колебательных движений для значений параметров вероятностей p_1 , p_2 , p_3 . Объясняется это как раз тем же самым явлением, что и препятствует использованию аналитического метода расчета P . Стратоновича, состоящем в том, что при сближении точек созвездия их информационный вклад становится равнозначным и распределение вероятностей между ними практически перестает влиять на информационную емкость. Как следствие, погрешность вычислительных методов начинает играть решающую роль на результат. Избежать такого эффекта позволяет простой технический прием. Он заключается в том, что при сближении позиций точек созвездий ближе заданной малой границы их вероятностные параметры складываются, а сами

указанные позиции заменяются одной точкой со средневзвешенной координатой. Для параметров $x_1, p_1, x_2, p_2, x_3, p_3$ и x_4, p_4 результат такого преобразования показан на рисунке 2а-2г.

Данные рис. 2 позволяют однозначно установить характер изменений оптимальной структуры созвездия QAM , возникающих при изменении уровня отношения пиковой мощности сигнала к шуму (P_{top}/P_{noise}), достигаемого в точке приема.

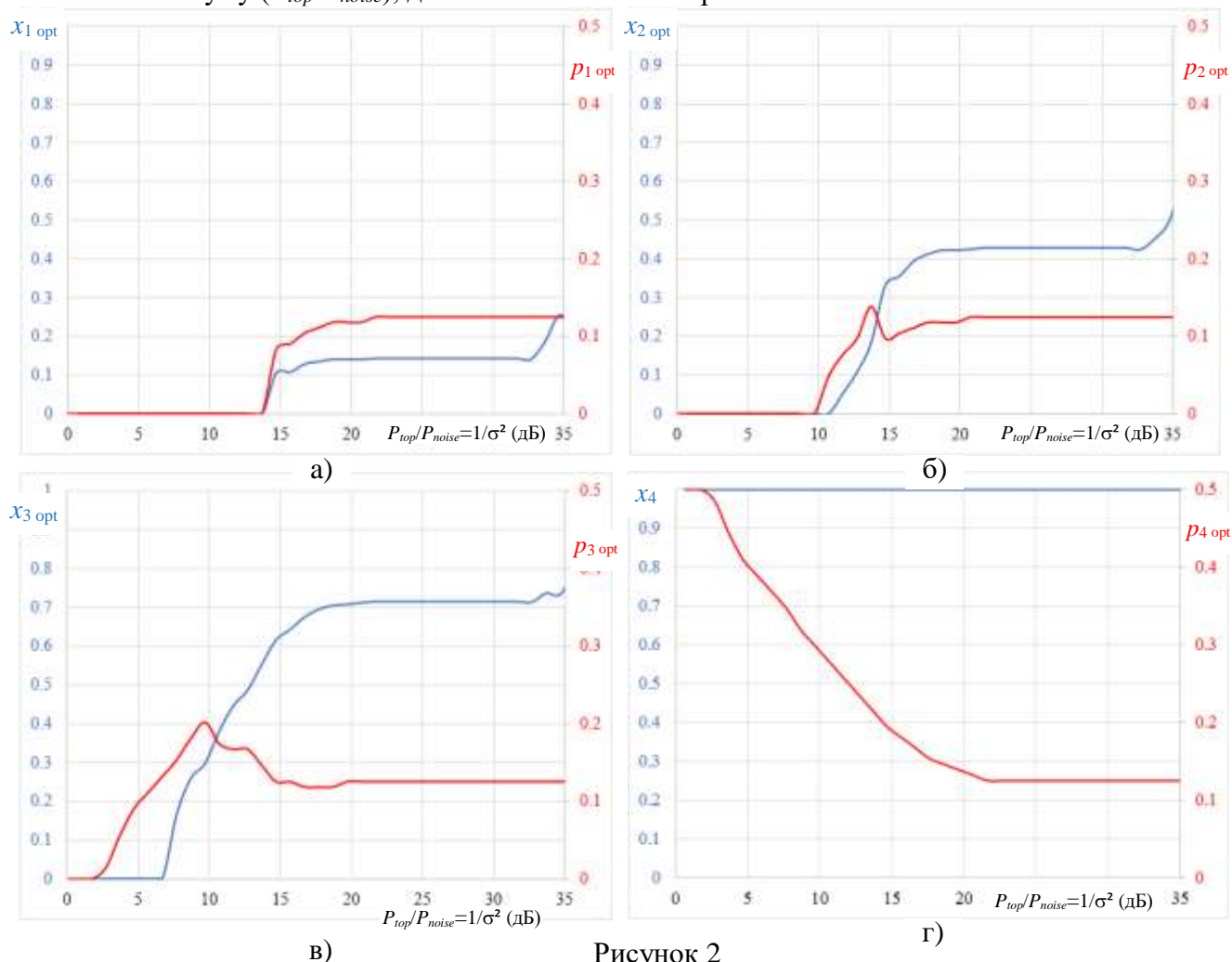


Рисунок 2

- 1) При значениях $P_{top}/P_{noise} < 1,7$ дБ, как следует из данных рис. 2в, оптимальным оказывается использование модуляции QPSK.
- 2) Начиная с уровня $P_{top}/P_{noise} = 1,7$ дБ, как следует из данных рис. 2в, в оптимальном созвездии QPSK появляются «добавочные» точки, располагающиеся по осям плоскости квадратурных компонент. Модуляция превращается в QAM-9. Но в окрестности значений $P_{top}/P_{noise} = 1,7$ дБ, если обозначить статистический вес «добавочных» позиций, лежащих на осях через Δp , то позиция в окрестности начала координат будет иметь статистический вес $8 * (\Delta p)^2$ – то есть на порядок меньшую. И только при $P_{top}/P_{noise} \approx 4$ дБ статистические веса центральной и осевых «добавочных позиций» выравниваются.
- 3) Начиная с уровня $P_{top}/P_{noise} = 6,6$ дБ, как видно из рис. 2в, «дополнительные» позиции созвездия QAM-9 расщепляются (синяя зависимость отрывается от горизонтальной оси) и модуляция преобразуется в QAM-16. Модуляция QAM-16 остается оптимальной вплоть до значения $P_{top}/P_{noise} = 10$ дБ.
- 4) Начиная с уровня $P_{top}/P_{noise} = 10$ дБ, как видно из рис. 2б, оптимальной становится модуляция QAM-25. Ненулевой статистический вес приобретает позиция x_2 , которая уже при $P_{top}/P_{noise} = 11$ дБ «расщепляется» (голубая зависимость отрывается от горизонтальной оси) и оптимальная модуляция превращается в QAM-36.

- 5) Начиная с $P_{top}/P_{noise} = 13,6$ дБ, как видно из рис. 2а, одновременно возникает ненулевой статистический вес и смещение от горизонтальной оси для параметра x_1 . Это означает, что оптимальное созвездие одномоментно превращается из $QAM-36$ в $QAM-64$, фактически минуя стадию $QAM-49$.
- 6) Дальнейшее увеличение P_{top}/P_{noise} на рубеже значений 17 дБ приводит к классической форме $QAM-64$ с равномерным статистическим весом точек созвездия и с равномерным заполнением ими квадратной области на квадратурной плоскости. Дальнейшие трансформации практически отсутствуют, так как увеличение информационной емкости сигнала достигает предела для принятого ограничения на максимальное число точек созвездия 64.

На рис. 3 показана зависимость количества информации на один символ модуляции, достигаемое для полученных оптимальных QAM созвездий, от уровня отношения пиковой мощности сигнала к шуму (P_{top}/P_{noise}) в точке приема. Для сравнения на рис. 3 также показана штриховой линией зависимость информации на символ модуляции $QAM-64$ традиционного формата (равномерный статистический вес и равномерное распределение позиций по площади).

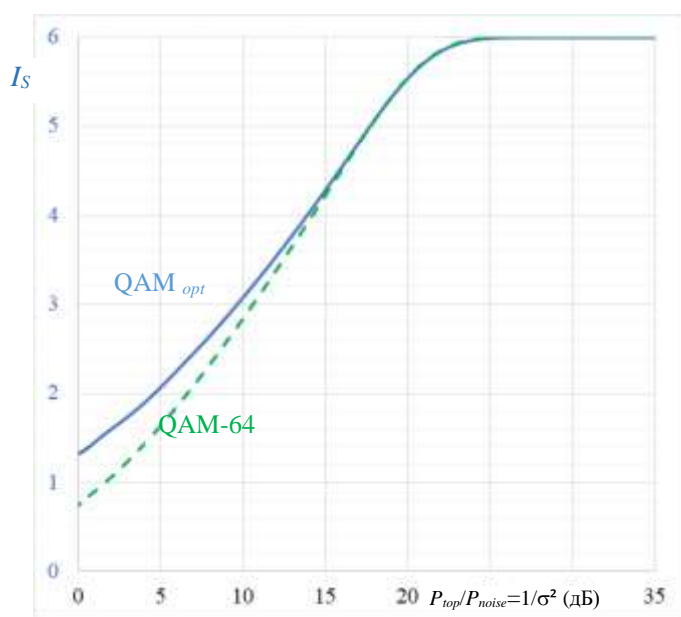


Рисунок 3

Как можно видеть, значимым выигрыш от перехода с модуляции $QAM-64$ на адаптивное управление созвездием QAM становится только при отношениях $P_{top}/P_{noise} < 10$ дБ, когда информация на символ возрастает на 10% и более, или в выражении эффективного увеличения сигнал/шум выигрыш составляет 1 дБ и более.

Выводы

Полученные результаты показали, что оптимизация расположения и статистического веса позиций QAM -модуляции целесообразна в радиоканале при уровнях пикового значения сигнал/шум в точке приема менее 10 дБ. При больших значениях сигнал/шум применение классической структуры $QAM-64$ обеспечивает информационную емкость сигнала, практически совпадающую с предельной. Дальнейший рост информационной емкости при высоких отношениях сигнал/шум возможен только при переходе на технологии, способные в радиоканале поддержать работу с модуляциями сложнее (с большим числом точек) чем $QAM-64$.

Литература

1. Стратонович Р.Л. Теория информации. – М.: Сов. Радио, 1975. – 424 с.

2. Прокис Дж. Цифровая связь // Перевод с английского под ред. Д.Д. Кловского. – М.: Советское радио, 2000. – 800 с.
3. Китаев А., Шень А., Вялый М. Классические и квантовые вычисления. – М.: МЦНМО, ЧеРо, 1999. – 192 с.
4. Poulin D., Kitaev A., Steiger D., Hastings M., Troyer M. Fast Quantum Algorithm for Spectral Properties // arXiv preprint arXiv: 1711.1102v1 [quant-ph] (Nov. 2017).
5. Kirkpatrick S., Gelatt C. D., Vecchi M. P. Optimization by Simulated Annealing // Science, – 1983. – Vol. 220. – P. 671-680.
6. Das A., Chakrabarti B. Colloquium: Quantum annealing and analog quantum computation // Rev. Mod. Phys. – 2008. Vol. 80. – P. 1061.
7. Быховский М.А. Гиперфазовая модуляция – оптимальный метод передачи сообщений в гауссовских каналах связи. – М.: Техносфера, 2018. – 310 с.