

ДИСКРЕТНЫЕ ЗАКОНЫ МОДУЛЯЦИИ С МАКСИМУМОМ ИНФОРМАЦИИ СИМВОЛА В УСЛОВИЯХ ОГРАНИЧЕННОЙ ПИКОВОЙ МОЩНОСТИ

*О.А. Шорин, Генеральный директор, профессор ООО «НСТТ», д.т.н., oshorin@gmail.com;
Г.О. Бокк, директор по науке ООО «НСТТ», д.т.н., bgo@nxtt.org*

УДК 621.391:621.396

Аннотация. Выполнен расчет оптимальных структур созвездий дискретной модуляции, для которых достигается максимум количества информации, приходящейся на один символ. Результаты получены для характерных условий практического применения с ограничениями на пиковую мощность транслируемого сигнала.

Ключевые слова: граница Шеннона; дискретная модуляция; радиоканал; пиковая мощность.

DISCRETE MODULATION LAWS WITH MAXIMUM OF THE SYMBOL INFORMATION IN CONDITIONS OF LIMITED PEAK POWER

*Oleg Shorin, General director of LLC «NXTT», doctor of technical science;
German Bokk, science director of LLC «NXTT», doctor of technical science*

Annotation. The calculation of the optimal structures of the constellations of discrete modulation, for which the maximum amount of information per one character is achieved, is carried out. The results were obtained for typical practical application conditions with restrictions on the peak power of the transmitted signal.

Keywords: Shannon border; discrete modulation; radio channel; peak power.

Введение

Вопрос о виде оптимального созвездия дискретной модуляции естественным образом возникает у каждого разработчика систем радиосвязи. И с удивлением приходится отмечать, что несмотря на обилие работ и исследований, посвященных данной тематике, до сих пор на него не получено ясного ответа. До недавнего времени, ввиду отсутствия высокотехнологичной базы, одним из основных принципов создания схем модуляции выступала простота реализации. На основе такого подхода были сформированы и широко утвердились на практике дискретные схемы амплитудно-фазовой модуляции, или *QAM* с равномерным распределением дискретных позиций в зоне квадратной формы на амплитудно-фазовой плоскости [1]. Если же число позиций используемой модуляции не является квадратом целого числа (например, как для *QAM-32* или *QAM-128*), то утвердилось использование форм близких к квадратным, с удаленными позициями в «углах». В проводных, оптоволоконных и релейных системах связи нашли также применение, правда в меньшей степени, различные кольцевые, гексагональные и крестообразные структуры созвездий.

Постановка задачи

Благодаря развитию цифровых методов обработки, произошедшему относительно недавно, состояние техники продвинулось значительно вперед. Вопросы реализации более сложных модуляционных структур перестали представлять главную проблему [2, 3]. Естественным образом расширились взгляды на критерии оптимизации схем дискретной модуляции. Конечно, в выборе указанных критериев существует определенный произвол. Можно, как и раньше, ориентироваться на простоту реализации или на различные промежуточные показатели, но самым естественным представляется использовать критерий максимальной информационной емкости отдельного символа, как, например, в [4-6]. А в

качестве ограничения использовать условие не превышения заданного уровня пиковой мощностью передаваемого сигнала [4, 5].

Анализ специальной литературы, посвященной данной тематике, показал, что для такой, на первый взгляд вполне естественной формулировки, не получено никаких, даже приблизительных результатов. И сама задача в указанной формулировке специально не исследовалась. А революционные достижения в области техники кодов, исправляющих ошибки [6-8], реально позволили подойти вплотную к границе Шеннона [9-11, 16-19]. Причем высокая гибкость в подборе параметра информационной скорости таких кодов (например, *LDPC*) обеспечивает выход к уровню пропускной способности Шеннона практически для любого реального значения сигнал/шум в канале связи. Именно поэтому информационная емкость отдельного символа модуляции для современного состояния техники фактически определяет потенциальную рабочую скорость обмена. И любые потери по данному показателю напрямую пересчитываются в потери ключевого показателя: производительности радиолинии.

Цифровой принцип организации работы проник не только в методы обработки сигналов, но и повсеместно в технику информационного обмена и даже в адаптивные алгоритмы пространственной обработки [12, 13]. Поэтому ключевую роль приобрели сигналы с дискретной модуляцией. Успешное решение ряда сопутствующих переходу на цифровую обработку проблем [14] привело к тому, что аналоговая модуляция отошла на второй план. Но базовые методы синтеза сигналов максимальной информационной емкости для обобщенных условий [9], разработанные на предыдущем этапе развития средств связи, не коснулись наиболее актуального в настоящее время сочетания дискретных законов модуляции с непрерывными каналами связи. Реально удалось найти только результаты для дискретных законов модуляции при передаче по дискретным каналам и аналоговых методов модуляции при передаче по непрерывным каналам. Настоящий материал возник как результат работы по восполнению обнаруженного пробела.

Решение задачи

Для ситуаций с сочетанием дискретного закона модуляции с непрерывным каналом связи нельзя напрямую воспользоваться разработанным в [9] методом оптимизации, ориентированным на аналоговые законы модуляции, предполагающем использование вариационного метода. Но для дискретных законов количество информации, содержащейся в сигнальном отсчете, может быть формально представлено так:

$$I_{YS}(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_N, y_N; P_1, P_2, \dots, P_N; \sigma^2), \quad (1)$$

где: x_n, y_n ($n = 1, 2, \dots, N$) – координаты точек созвездия дискретного закона модуляции, P_n ($n = 1, 2, \dots, N$) – вероятности дискретного распределения вероятностей закона модуляции, N – число точек созвездия модуляции, σ^2 – дисперсия шума канала связи, наблюдаемого в отдельной квадратурной компоненте.

Условия ограничения пиковой мощности и нормировки при этом запишутся как

$$\max(x_1^2 + y_1^2, x_2^2 + y_2^2, \dots, x_N^2 + y_N^2) \leq P_{top}, \quad P_1 + P_2 + \dots + P_N = 1. \quad (2)$$

При этом вариационный принцип определения максимума преобразуется в уравнение равенства нулю производных целевой функции

$$L = I_{YS} + \sum_{n=1}^N (\alpha_n (x_n^2 + y_n^2) + \beta P_n), \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_n} L = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y_n} L = 0, \quad \frac{\partial}{\partial P_n} L = 0, \quad (n = 1, 2, \dots, N), \quad (4)$$

где: α_n ($n=1, \dots, N$), β – неопределенные множители Лагранжа, обеспечивающие условия ограничений (2). В соответствии с теоремой Куна-Таккера, множители α_n должны равняться 0 для всех n , при которых $(x_n^2 + y_n^2) \leq P_{top}$ и иметь бесконечно большое значение, для всех n , при которых $(x_n^2 + y_n^2) > P_{top}$.

Получив решения системы (4), подстановкой найдем соответствующее значение количества информации символа модуляции $I_{YS\ opt}(N)$. Оно, в общем случае, будет зависеть от значения N , задающего число точек созвездия модуляции. Завершает решение выбор на множестве допустимых $[N_{min}, N_{max}]$ такого N , которое обеспечит абсолютный максимум:

$$N_{opt} = \arg\left(\max_{N \in [N_{min}, N_{max}]} I_{YS\ opt}(N)\right), \quad I_{MAX} = I_{YS\ opt}(N_{opt}). \quad (5)$$

Для стандартной модели гауссовского канала, применяемой на практике, формула расчета количества информации (1) конкретизируется так [9]:

$$I_{YS}(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_N, y_N; P_1, P_2, \dots, P_N; \sigma^2) = H_Z - H_{Z/S} = \\ = -\iint W_Z(x, y) \log_2(W_Z(x, y)) dx dy + \iint W_{Z/S}(x, y) \log_2(W_{Z/S}(x, y)) dx dy, \quad (6)$$

где: H_Z – энтропия двумерного распределения смеси квадратур символа модуляции и шума, $H_{Z/S}$ – энтропия условного двумерного распределения смеси квадратур символа модуляции и шума при условии заданных квадратур символа (в данном случае это энтропия квадратурных

компонент шума), $W_Z(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \sum_{n=1}^N P_n \exp\left(-\frac{(x-x_n)^2 + (y-y_n)^2}{2\sigma^2}\right)$ – двумерная плотность

распределения смеси квадратур символа модуляции и шума,

$W_{Z/S}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \sum_{n=1}^N \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right)$ – в данном случае это двумерная плотность вероятности

квадратур шума. В (6), используется логарифм по модулю 2, а не натуральный, как в [9]. Это для того, чтобы результат получался в установленном битовом формате, применяемом повсеместно разработчиками систем связи, а не в натах, которые используются, в основном, в академических изысканиях.

К сожалению, соотношения (3)-(6) не позволяют найти решение задачи в замкнутой аналитической форме. Тем не менее на их основе можно сформировать вычислительный алгоритм, позволяющий для любого заданного отношения сигнал/шум (вида $P_{top}/2\sigma^2$, двойка в знаменателе появляется так как шум составляют две квадратуры) найти решение поставленной задачи.

В качестве базы алгоритма расчета оптимальных созвездий был выбран градиентный метод [15]. А на начальном этапе использовалась настройка «кольцевой» структуры размещения позиций созвездия по компонентам: вероятности попадания на разные «кольца» структуры, радиусы «колец» структуры и числа точек на «кольцах». В качестве базы алгоритма предварительной настройки использовался метод Бокса-Уилсона [15]. «Кольцевые» структуры выбирались в качестве исходных потому, что ряд предварительных длительных настроек, произведенных со случайными начальными условиями, продемонстрировал оптимальность итоговых созвездий, в которых геометрия расположения точек достаточно точно описывалась «кольцевыми» структурами с равномерным распределением условных вероятностей внутри отдельных «колец».

Результаты

Полученные результаты позволили выявить ряд интересных закономерностей, которые представляется полезным отметить отдельно:

- каждому отношению сигнал/шум ($P_{top}/2\sigma^2$) отвечает вполне определенная структура или даже класс оптимальных структур созвездий дискретной модуляции, обладающих максимальной информационной емкостью отдельного отсчета;
- при малых отношениях сигнал/шум ($P_{top}/2\sigma^2$) оптимальной является однокольцевая структура с равномерным расположением точек. С ростом отношения сигнал/шум в оптимальных структурах появляется сначала дополнительная позиция в центре амплитудно-фазовой плоскости, а потом центральная позиция приобретает небольшой радиус, на котором располагается от 3-х и более точек;
- дальнейший рост отношения сигнал/шум сопровождается увеличением радиуса «кольца» центральных позиций созвездия и увеличением числа точек на центральном кольце (внешние «кольца» теряют точки). Промежуточные кольца также «увеличивают» свои радиусы;
- еще большее увеличение отношения сигнал/шум приводит к появлению новой позиции созвездия в центре амплитудно-фазовой плоскости и т.д.;
- при малых и умеренных значениях отношения сигнал/шум формы оптимальных созвездий модуляции точно совпадают с «кольцевыми». С точностью до 9-го знака не удалось выявить отклонений от них. Но число точек созвездия N для обеспечения такого условия должно быть не меньше порога, определяемого отношением сигнал/шум (N_{min});
- когда наблюдается превышение значением N порогового уровня, определяемого отношением сигнал/шум, дополнительные точки созвездия модуляции не приводят к увеличению количества информации на символе. Такие точки можно произвольным образом располагать на «кольцах», сохраняя их радиусы и условные вероятности активации. С точностью до 9-го знака изменения информации не происходит;
- в случае, когда оптимальной является чисто «кольцевая» структура, повороты начальных фаз, задающих стартовые позиции для точек, равномерно располагающихся на «кольцах», никак не влияют (проверка произведена с точностью до 7 знака) на информационную емкость символа модуляции;
- если число точек созвездия N меньше порогового уровня, определяемого отношением сигнал/шум, оптимальным будет созвездие с деформированной «кольцевой» структурой, если число кольцевых подмножеств больше двух. Внутреннее «кольцо» обычно представляет треугольник, квадрат, пятиугольник или шестиугольник. А срединные «кольца» при этом содержат значительно большее число точек, но обладают промежуточной формой между чистой окружностью и многоугольником, стоящим в центре созвездия. Внешнее «кольцо» всегда является окружностью с радиусом, обеспечивающим равенство уровня сигнала значению P_{top} . На внешнем кольце всегда располагается наибольшее число точек созвездия.

Некратное степени двойки число точек созвездия N и неравенство вероятности активации точек, принадлежащих разным «кольцам» не являются препятствием к кодированию двоичного битового потока информации. Действительно, при использовании алгоритма Хуффмана можно добиться на блоках достаточной длины однозначного соответствия при сколь угодно малых потерях скорости информационного обмена [9].

Возможность без потерь информационной емкости использовать произвольные N , превосходящие порог, является полезной для согласования информационной скорости кода, исправляющего ошибки (например, *LDPC*), с модуляционной структурой. При этом можно обеспечить условия работы кодека для максимального приближения скорости информационного обмена к границе, устанавливаемой оптимальным законом модуляции.

В табл. 1 приведены экспериментально установленные граничные значения N_m (числа точек созвездия дискретной модуляции), начиная с которых информационная емкость символа модуляции, при заданном уровне сигнал/шум ($P_{top}/2\sigma^2$), достигает предела. Для отношений сигнал/шум более 14 дБ указанные границы оказались более 64 (предельного уровня, заложенного в программу) и поэтому точно не установлены.

Таблица 1

$P_{top}/2\sigma^2$ (дБ)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
N_m	9	10	10	12	12	15	15	16	23	28	31	38	47	56	64

На рис. 1 показана черной сплошной характеристикой выявленная зависимость максимального числа бит информации на символ модуляции от уровня сигнал/шум в канале ($P_{top}/2\sigma^2$), которое может быть достигнуто в условиях ограничения пиковой мощности сигнала с дискретной модуляцией. Для сопоставления на том же рисунке красной сплошной линией показана зависимость максимальной удельной информации на символ модуляции, сформированная выбором максимума на множестве традиционно используемых законов QAM_{64} , QAM_{32} , QAM_{16} , PSK_8 , $QPSK$. Как можно видеть, начиная с уровня сигнал/шум 8 дБ, традиционные схемы модуляции имеют эффективные энергетические потери порядка 1 дБ, а в диапазоне значений сигнал/шум от 19 дБ до 23 дБ указанные потери достигают 2 дБ.

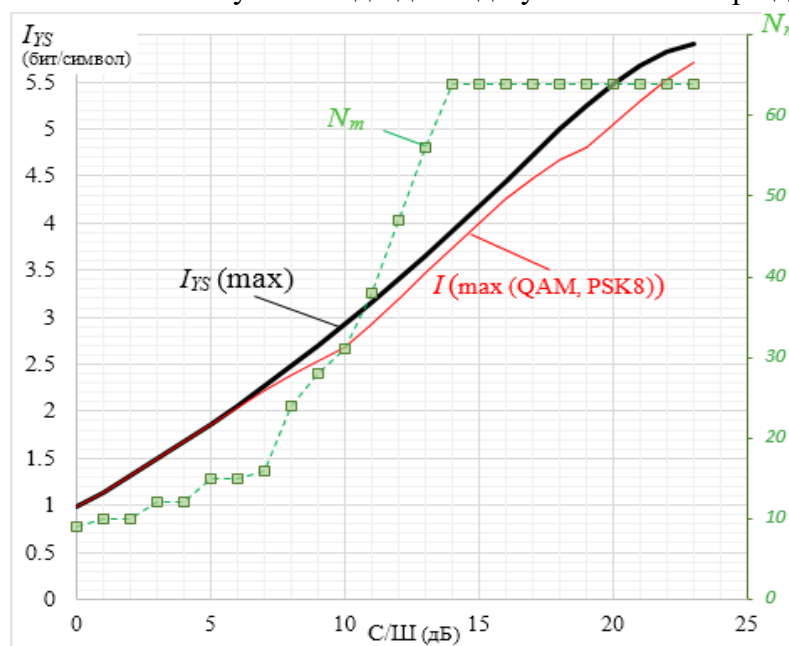


Рисунок 1

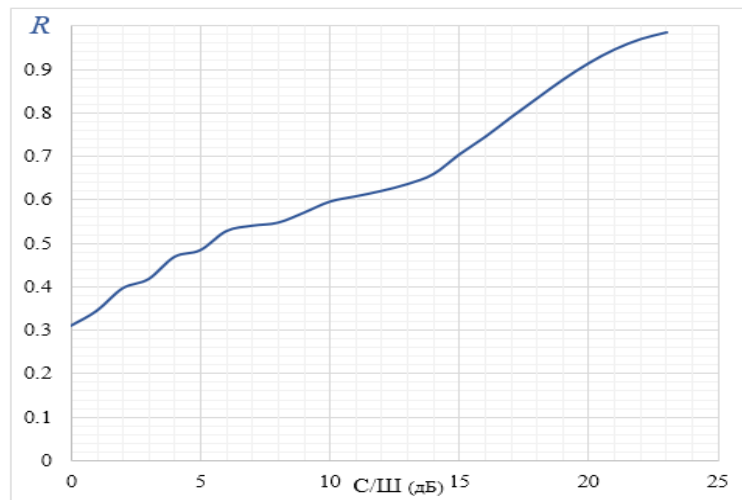


Рисунок 2

Зеленым цветом со значениями по вспомогательной оси справа показаны значения N_m – минимального числа точек оптимального дискретного созвездия, начиная с которого можно обеспечить расчетный максимум информации на символ модуляции.

На рис. 2 показана зависимость максимальной информационной скорости кода (R), исправляющего ошибки, от уровня сигнал/шум в канале связи, при которой возможен выход на предельные показатели, задаваемые законом дискретной модуляции. Эти данные можно использовать, например, при выборе параметров *LDPC*-кодека.

На рис. 3 показаны вычисленные созвездия дискретной модуляции, обладающие максимальным показателем информационной емкости на символ при минимально возможном числе точек N_m . На рисунке 3а показано созвездие для отношения сигнал/шум ($P_{top}/2\sigma^2$) 5 дБ, рис. 3б – 10 дБ, рис. 3в – 12 дБ, рис. 3г – 15 дБ, рис. 3д – 17 дБ и рис. 3е – 20 дБ.

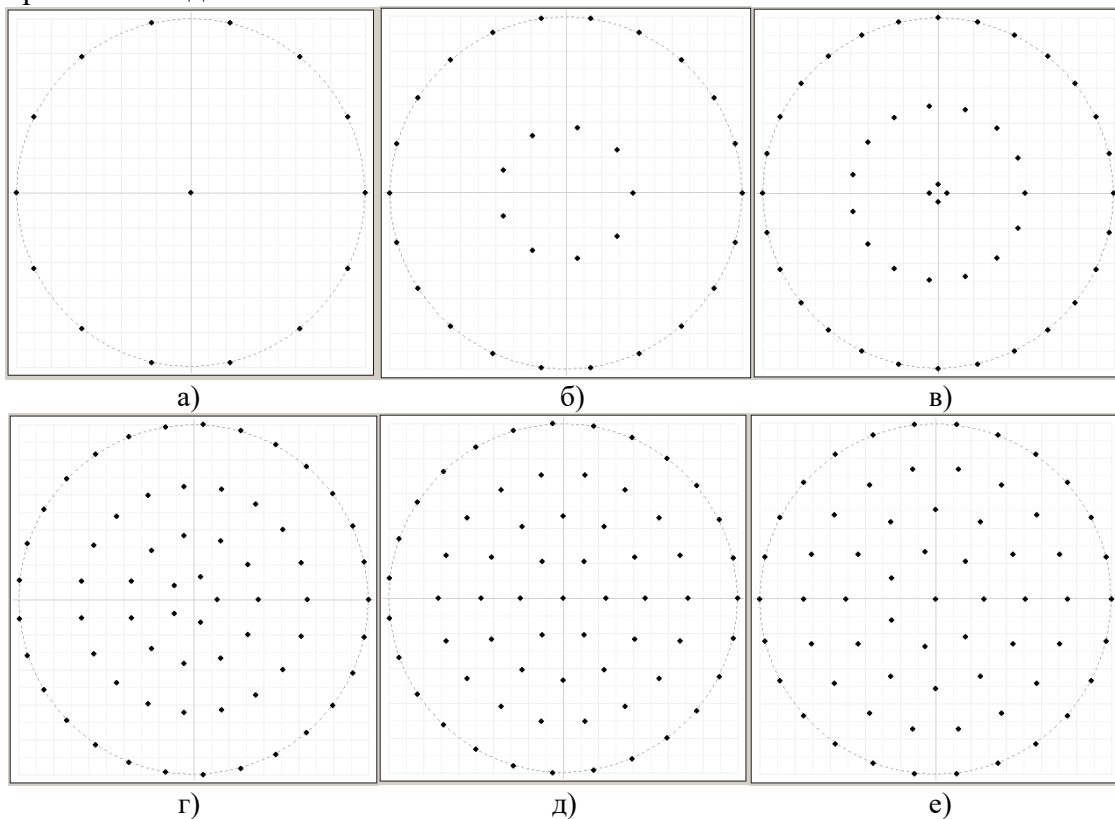


Рисунок 3

Заключение

Получены оптимальные структуры дискретных созвездий модуляции, обеспечивающие максимальную информационную емкость на символе. Традиционные созвездия *QAM* (*PSK* и *QPSK*) проигрывают им по эффективности до 2 дБ через представление эквивалентных потерь по снижению уровня сигнал/шум.

Литература

1. Шорин О.А., Бокк Г.О. Оптимальная структура дискретной *QAM*-модуляции, обеспечивающая максимум информационной производительности радиоканала // Экономика и качество систем связи, 2018. – № 3 (9). – С. 9-17.
2. Бокк Г.О. Алгоритм ММО с применением управления числом логических каналов // Экономика и качество систем связи, 2017. – № 1 (3). С. 60-69.
3. Бокк Г.О. Оптимизация ассемблерного кода БПФ, ориентированного на обработку OFDM сигналов сотовых сетей связи // Экономика и качество систем связи, 2017. – № 4 (6). – С. 40-51.
4. Шорин О.А., Бокк Г.О. Аналитическое решение вариационной задачи Шеннона по определению оптимальной структуры сигнала в условиях ограничения пиковой мощности // Экономика и качество систем связи, 2018. – № 1 (7). – С. 30-39.
5. Шорин О.А., Бокк Г.О. Численные результаты решения вариационной задачи Шеннона определения оптимальной структуры сигнала в условиях ограничения пиковой мощности // Экономика и качество систем связи, 2018. – № 1 (7). – С. 39-47.
6. MacKay D. J., Neal R. M. Near Shannon limit performance of low-density parity check codes // Electronics Letters, vol. 32, no. 18, pp. 1645-1646, August 1996.
7. Sae-Young Chung, Forney G. D. On the Design of Low-Density Parity-Check Codes within 0.0045 dB of the Shannon Limit // IEEE Communications Letters, Vol. 5, No. 2, pp. 58-60, February 2001.
8. Gallager R. G. Low Density Parity Check Codes, Monograph, M.I.T. Press, 1963.
9. Стратонович Р.Л. Теория информации. – М.: «Сов. Радио», 1975. – 424 с.
10. Варгаузин В. Вблизи границы Шеннона // «Телемультимедиа» июнь, 2005. – С. 3-10.
11. Бокк Г.О. Оптимизация ММО с введением управления числом логических каналов. В книге: Мобильный бизнес: перспективы развития и реализации систем радиосвязи в России и за рубежом сборник материалов (тезисов) XXX международной конференции РАЕН. 2011. – С. 97-109.
12. Патент на изобретение № 2640030 РФ. Способ адаптивного распределения частотно-временного ресурса / Бокк Г.О., Шорин О.А. Заявлено 11.04.2017. Оpubл. 26.12.2017, Бюл. № 36.
13. Патент на полезную модель № 170231 РФ. Всенаправленная кольцевая антенная решетка / Бокк Г.О., Шорин О.А. Заявлено 06.02.2017. Оpubл. 18.04.2017, Бюл. № 11.
14. Шорин О.А., Бокк Г.О. Снижение негативного влияния высоких значений пик-фактора сигналов в системе McWILL // Экономика и качество систем связи, 2019. – № 1 (11). – С. 9-13.
15. Горгадзе С.Ф., Бокк Г.О. Планирование и обработка результатов эксперимента в радиотехнике и инфокоммуникационных системах. – М.: Горячая линия-Телеком, 2018. – 132 с.
16. Лохвицкий М.С., Сорокин А.С., Шорин О.А. Мобильная связь: стандарты, структуры, алгоритмы, планирование Москва, 2018.
17. Шорин О.А., Бокк Г.О. Эквалайзер для коррекции мультидоплеровских искажений OFDM-сигналов в сетях LTE и McWILL // Электросвязь, 2017. – № 1. – С. 28-34.
18. Шорин О.А., Бокк Г.О., Аверьянов Р.С., Шорин А.О. Оптимизация геометрии адаптивной антенны для сотовой сети с OFDM сигналами в книге: Мобильный бизнес: перспективы развития и реализации систем радиосвязи в России и за рубежом сборник материалов (тезисов) XXXVII международной конференции РАЕН. 2016. – С. 7-8.
19. Шорин О.А., Бокк Г.О., Аверьянов Р.С., Шорин А.О. Оптимизация геометрии адаптивной антенны для сотовой сети с OFDM сигналами // Экономика и качество систем связи, 2016. – № 2 (2). – С. 60-67.