

ФИЛЬТРАЦИЯ ПУАССОНОВСКОГО ПОТОКА С ИЗМЕНЯЮЩЕЙСЯ ИНТЕНСИВНОСТЬЮ, СКАЧКИ КОТОРОЙ ФОРМИРУЕТ ДРУГОЙ ПУАССОНОВСКИЙ ПОТОК

Г.О. Бокк, д.т.н., ООО «НИРИТ – СИНВЭЙ Телеком Технолоджи», bgo@nxtt.org;
О.А. Шорин, д.т.н., профессор, Московский технический университет связи и информатики, oshorin@nxtt.org;
А.О. Шорин, к.т.н., ООО «НИРИТ – СИНВЭЙ Телеком Технолоджи», as@nxtt.org.

УДК 621

Аннотация. Широкий спектр событий в сетях массового обслуживания, на биржевых торгах, системах автоматического контроля и управления может быть описан моделью пуассоновского потока с изменяющейся интенсивностью, претерпевающей случайные скачки в априорно неизвестные моменты. Прямое решение задачи идентификации в таких условиях приводит к алгоритмам экспоненциальной сложности. Предлагается асимптотически оптимальный по критерию максимального правдоподобия алгоритм фильтрации наблюдаемого пуассоновского потока, обладающий полиномиальной вычислительной сложностью. Показано, что оптимальные оценки моментов скачков должны совпадать с одним из моментов наблюдаемых событий.

Ключевые слова: пуассоновский поток; стохастическая фильтрация; отношение правдоподобия; интенсивность; скачок интенсивности; оценка максимального правдоподобия.

FILTERING A POISSON FLOW WITH VARYING INTENSITY, WHOSE JUMPS ARE FORMED BY ANOTHER POISSON FLOW

German Bokk, doctor of technical sciences, LLC «NIRIT – XINWEY Telecom technologies»;
Oleg Shorin, doctor of technical sciences, professor, Moscow technical university of communications and informatics;
Alexander Shorin, Ph.D., LLC «NIRIT – XINWEY Telecom technologies».

Annotation. A wide range of events in Queuing networks, stock exchanges, and automatic systems can be described by a Poisson flow model with changing intensity that undergoes random jumps at a priori unknown moments. The direct solution of the identification problem in such conditions leads to algorithms with exponential complexity. An asymptotically optimal ML filtering algorithm for observed Poisson flow with polynomial computational complexity is proposed. It is shown that the optimal estimates of the moments of jumps must coincide with one of the moments of the observed events.

Keywords: poisson flow; stochastic filtering; likelihood Ratio; intensity; cintensity jump; maximum likelihood estimation.

Введение

Широкий спектр событий (ситуаций), возникающих в системах массового обслуживания, можно описать с помощью модели пуассоновского потока. К ним относятся, например, посещения покупателями магазина, акты совершения покупок, регистрация абонентов в сотах систем мобильной связи, потоки запросов входящих и выходящих звонков, запросы доступа к базам данных и т.д. Такие потоки являются наблюдаемыми, так как события, описываемые ими, поддаются прямой фиксации. Но интенсивность указанных потоков, как правило, не поддается

непосредственному измерению и не сохраняется постоянной. На нее влияют как регулярные процессы, так и случайные явления. Характерными регулярными процессами являются, например, сезонные изменения, суточные расписания деятельности, плановые мероприятия, организация дорожного движения и т.д. Примерами ситуаций, приводящих к случайным воздействиям на интенсивности потоков, являются различного рода аварии, неожиданные действия со стороны конкурентов (распродажи, рекламные акции, введение новых тарифов), неожиданные изменения условий, погоды и т.д. В последних случаях, как правило, возникают скачкообразные изменения интенсивности наблюдаемого потока, которые могут быть как положительными, так и отрицательными. Сами явления подобного рода отличаются относительно редким появлением, если сравнивать с интенсивностью возникновения событий в наблюдаемом потоке. Также подобная модель поведения довольно часто встречается в технических задачах, например, в устройствах сверхширокополосной локации [1], системах контроля пик-фактора групповых сложных сигналов [2] и схемах демодуляции сигналов [3, 4].

Для модели гауссовского порождающего процесса в уравнениях изменения интенсивности пуассоновского потока решение задачи фильтрации было получено в [5]. Оно пригодно для ситуаций с воздействием на наблюдаемый поток большого числа случайных факторов, каждый из которых имеет относительно малый уровень влияния. Но для описанных случаев с высоким уровнем воздействия отдельных, редко возникающих случайных событий данная модель не подходит. Соответствующего решения задачи фильтрации в литературе обнаружить не удалось.

Полученное ниже решение задачи фильтрации имеет определенную пользу. На его основе удастся определять моменты возникновения и масштаб воздействия случайных событий, а также предсказывать последующие результаты. Синтезированный алгоритм может быть использован не только для оценок и прогноза изменений интенсивностей пуассоновских потоков, но и включаться как элемент в различные схемы управления, настройки, идентификации объектов, отвечающих модели Пуассона.

Математическая постановка задачи

Полагаем, что наблюдению на интервале времени $[t_0, T)$ доступен пуассоновский поток событий с изменяющейся интенсивностью:

$$\lambda(t, t_0; \lambda_{0T}), \quad t \in [t_0, T), \quad (1)$$

где: λ_{0T} – начальное значение интенсивности потока в момент t_0 , удовлетворяющее по определению условию $\lambda(t_0, t_0; \lambda_{0T}) = \lambda_{0T}$.

Если бы не происходили случайные интенсивные воздействия, то интенсивность бы изменялась по известному закону:

$$\lambda(t, t_0; \lambda_{0T}) = f(t, t_0; \lambda_{0T}),$$

связанному с некоторым априорно известным регулярным процессом. Но если в момент τ_1 возникает случайное воздействие, то интенсивность изменяется скачком и в последующем описывается законом:

$$\lambda(t, \tau_1; \lambda_{\tau_1}) = f(t, t_0; \lambda_{0T}) + \lambda_{\tau_1} \cdot \Psi(t - \tau_1, \bar{a}_1), \quad t \in [\tau_1, T), \quad (2)$$

где: λ_{τ_1} – величина возникшего скачка интенсивности (может иметь и отрицательное значение),

$\Psi(t - \tau_1, \vec{a}_1)$ ($\Psi(t, \vec{a}_1) = 0$, при $t < 0$; $\lim_{t \rightarrow +0} (\text{sign} \Psi(t, \vec{a}_1)) = 1$) – функция переходного процесса, возникающего из-за случайного воздействия на интенсивность, $\vec{a}_1 = (a_{11} a_{12} \dots a_{1k})^T$ – вектор вспомогательных параметров, определяющих форму реакции.

Принятая модель воздействия (2) несколько снижает общность постановки задачи, но охватывает обширный класс ситуаций, в которых скачки порождают однородные от момента возникновения переходные процессы, аддитивно складывающиеся с невозмущенным законом. Если на интервале $[t_0, T)$ наблюдается M скачков интенсивности в моменты времени $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_M$, с величинами $\lambda_{\tau_1}, \lambda_{\tau_2}, \dots, \lambda_{\tau_M}$, то закон (2) превратится в:

$$\lambda(t, t_0; \lambda_{0T}) = f(t, t_0; \lambda_{0T}) + \sum_{m=1}^M \lambda_{\tau_m} \cdot \Psi(t - \tau_m, \vec{a}_m). \quad (3)$$

Наблюдению на интервале $[t_0, T)$ доступны события пуассоновского потока, возникающие в моменты t_1, t_2, \dots, t_{N_T} , число которых N_T значительно превосходит число скачков M ($N_T \gg M$). Статистику моментов возникновения скачков полагаем отвечающей пуассоновскому потоку постоянной интенсивности μ

$$(\mu \ll \min_{t \in [t_0, T)} (f(t, t_0; \lambda_{0T}))).$$

Априорные данные для параметров

$\lambda_{\tau_1}, \lambda_{\tau_2}, \dots, \lambda_{\tau_M}$, $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_M$ полагаем отсутствующими.

В таких условиях требуется синтезировать алгоритм фильтрации для неизвестной изменяющейся интенсивности (1), обнаружить моменты возникновения, величину и вспомогательные параметры скачков.

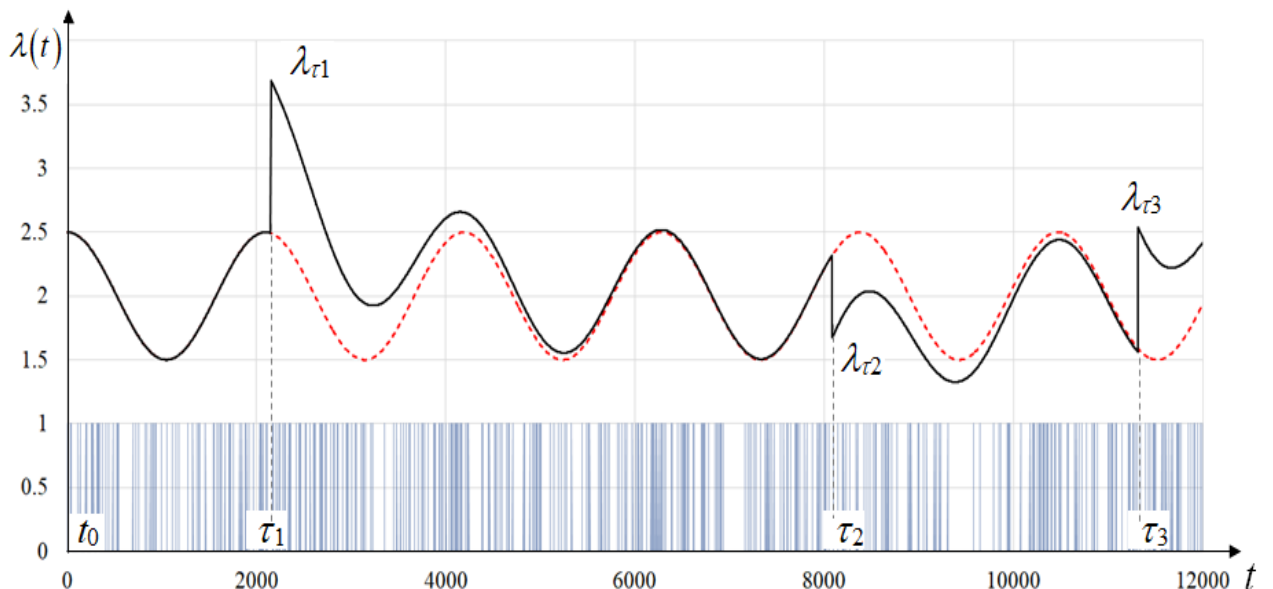


Рисунок 1

На рис. 1 для примера показана зависимость интенсивности, подлежащей фильтрации, в которой регулярная составляющая представляет постоянный уровень с дополнительным сезонным изменением в виде гармонической составляющей. Случайные скачки производят возмущения в виде экспоненциально затухающих аддитивных реакций (вспомогательных параметров нет). Синими

вертикальными линиями показаны моменты наблюдаемого пуассоновского потока событий. На рис. 1 показан пример изменяющейся интенсивности наблюдаемого пуассоновского потока событий при случайных скачках, формируемых порождающим потоком Пуассона.

Решение задачи фильтрации

В работе [6], стр. 63-65, задача фильтрации сведена к решению двухточечной краевой задачи. При этом используется:

- 1) квадратичная функция штрафов за невязку наблюдений с прогнозом, что отвечает модели гауссовских шумов;
- 2) квадратичная функция штрафов за отклонение скорости движения от прогнозируемого значения, что соответствует гауссовской модели порождающего процесса, присутствующего в уравнениях движения.

Обобщение указанной методики на случай, когда вместо зашумленного гауссовскими помехами сигнала в канале наблюдений присутствует пуассоновский поток событий, с успехом было выполнено в [5]. Для этого оказалось достаточным применение простой замены квадратичной метрики на метрику Пуассона. Структура алгоритма не претерпела радикальных изменений. Но если вместо гауссовского порождающего процесса перейти к пуассоновскому, то в рассматриваемых условиях нельзя будет использовать дифференцирование $\frac{\partial}{\partial \mathbf{w}}$, играющее ключевую роль в составлении уравнений двухточечной краевой задачи, являющихся базовыми для синтеза алгоритмов фильтрации, как показано в основополагающей работе [6]. Модель становится сложнее. Появляется протяженная во времени зависимость между состояниями порождающего процесса в прошедшие моменты и осуществляемым в текущий момент воздействием на движение (изменение) параметра интенсивности. Строго говоря, условие Марковости нарушается. Соотношение (3) показывает, что в рассматриваемой модели порождающим является пуассоновский процесс, являющийся марковским, вида:

$$\Xi(t) = \sum_{m=1}^M \lambda_{\tau_m} \delta(t - \tau_m),$$

где: $\delta(\cdot)$ – дельта-функция Дирака подвергается операции свертки с функциями импульсной реакции $\Psi(t - \tau, \vec{a}_m)$. Марковское свойство теряется на уровне взаимодействий импульсных реакций.

Рассмотрим довольно широкое множество параметрических классов функций импульсных реакций $\Psi_{\lambda, \vec{a}, t \in [0, \infty)}$, $(\lambda \Psi(t, \vec{a}) \in \Psi_{\lambda, \vec{a}, t \in [0, \infty)})$, обладающих свойством инвариантности относительно операции сложения:

$$\lambda_1 \Psi(t, \vec{a}_1) + \lambda_2 \Psi(t, \vec{a}_2) \in \Psi_{\lambda, \vec{a}, t \in [0, \infty)}, \text{ если } \lambda_1 \Psi(t, \vec{a}_1) \in \Psi_{\lambda, \vec{a}, t \in [0, \infty)} \text{ и } \lambda_2 \Psi(t, \vec{a}_2) \in \Psi_{\lambda, \vec{a}, t \in [0, \infty)}$$

и сдвига во времени:

$$\lambda \Psi(t, \vec{a}) \cdot 1(t - T) = \tilde{\lambda} \Psi(t - T, \vec{a}) \in \Psi_{\lambda, \vec{a}, t \in [0, \infty)}, \text{ если } \lambda \Psi(t, \vec{a}) \in \Psi_{\lambda, \vec{a}, t \in [0, \infty)},$$

где $T > 0$ произвольный сдвиг, $1(t) = \begin{cases} 1, & \text{при } t \geq 0 \\ 0, & \text{при } t < 0 \end{cases}$ – единичная функция,

$\tilde{\lambda}, \tilde{a}$ – параметры, полученные из исходных λ, \bar{a} путем отображения, однозначно определяемого значением сдвига T . Для таких импульсных реакций последний скачок, возникший в момент τ , всегда будет полностью маскировать воздействие предпоследнего скачка в моменты $t \geq \tau$.

Это объясняется тем, что вклад от импульсной реакции предпоследнего скачка на интервале $[\tau, \infty)$ можно однозначно представить через поправки $\Delta\lambda, \Delta\bar{a}$ к параметрам последнего скачка. А в принятых условиях полной априорной неопределенности относительно параметров скачков, это приводит к полной маскеровке и восстановлению свойства марковости процесса в канале наблюдений.

Последнее позволяет для решения задачи в полном объеме воспользоваться наработками аппарата теории стохастической фильтрации.

Примерами указанных классов являются:

- 1) экспоненциальный с $\Psi(t) = 1(t) \cdot \exp(-\alpha t)$, $\alpha > 0$;
- 2) экспоненциально-гармонический с $\Psi(t) = 1(t) \cdot \exp(-\alpha t) (a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t))$, $\alpha > 0$;
- 3) полиномиальный с $\Psi(t) = 1(t) \cdot (a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0)$;
- 4) экспоненциально-полиномиальный с $\Psi(t) = 1(t) \cdot \exp(-\alpha t) (a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0)$, $\alpha > 0$;
- 5) обратно пропорциональный с $\Psi(t) = 1(t) / (a + t)$;
- 6) ступенчатый с $\Psi(t) = 1(t)$;
- 7) всевозможные комбинации, составленные произведением и суммированием импульсных реакций вышеперечисленных классов.

Поэтому, например, рассмотренные в [7] случаи ступенчатых, линейных, линейно-ступенчатых скачков интенсивности пуассоновского потока представляют частные случаи рассматриваемого множества классов.

С учетом выбранной модели плотность вероятности наблюдения на интервале $[t_0, T)$ потока событий с моментами возникновения t_i , $i = 1, 2, 3, \dots, N_T$ можно записать так:

$$\begin{aligned}
P(\lambda_{\tau_1}, \lambda_{\tau_2}, \dots, \lambda_{\tau_M}, \bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_M, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_M, M | t_0, T, \lambda_{0T}) &= P(\vec{\lambda}_\tau, \vec{A}, \vec{\tau}, M) = \\
= \mu(\tau_1) \cdot \exp\left(-\int_{t_0}^{\tau_1} f(t) dt\right) \cdot \prod_{i=1}^{N_{\tau_1}} f(t_i) \cdot \exp\left(-\int_{t_0}^{\tau_1} \mu(\tau) d\tau\right) \cdot \\
\cdot \mu(\tau_2) \cdot \exp\left(-\int_{\tau_1}^{\tau_2} (f(t) + \lambda_{\tau_1} \Psi(t - \tau_1)) dt\right) \prod_{i=N_{\tau_1}+1}^{N_{\tau_2}} (f(t_i) + \lambda_{\tau_1} \Psi(t_i - \tau_1)) \cdot \exp\left(-\int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu(\tau) d\tau\right) \\
\cdot \dots \\
\cdot \mu(\tau_M) \cdot \exp\left(-\int_{\tau_{M-1}}^{\tau_M} \left(f(t) + \sum_{m=1}^{M-1} \lambda_{\tau_m} \Psi(t - \tau_m)\right) dt\right) \cdot \prod_{i=N_{\tau_{M-1}}+1}^{N_{\tau_M}} \left(f(t_i) + \sum_{m=1}^{M-1} \lambda_{\tau_m} \Psi(t_i - \tau_m)\right) \cdot \exp\left(-\int_{\tau_{M-1}}^{\tau_M} \mu(\tau) d\tau\right) \\
\cdot \exp\left(-\int_{\tau_M}^T \left(f(t) + \sum_{m=1}^M \lambda_{\tau_m} \Psi(t - \tau_m)\right) dt\right) \prod_{i=N_{\tau_M}+1}^{N_T} \left(f(t_i) + \sum_{m=1}^M \lambda_{\tau_m} \Psi(t_i - \tau_m)\right) \cdot \exp\left(-\int_{\tau_M}^T \mu(\tau) d\tau\right) \times \\
\times \prod_{m=1}^M W_{pr}(\lambda_{\tau_m}) d\lambda_{\tau_m} \cdot \prod_{m=1}^M W_{pr}(\bar{a}_m) d\bar{a}_m \cdot \prod_{m=1}^M d\tau_m \cdot \prod_{i=1}^{N_T} dt_i.
\end{aligned}$$

где: $W_{pr}(\lambda_{\tau_m}), W_{pr}(\bar{a}_m)$ – априорные плотности вероятности амплитуды и сопутствующих параметров скачков, которые считаем постоянными в силу высокой априорной неопределенности, использованы обозначения $\vec{\lambda}_\tau = (\lambda_{\tau_1}, \lambda_{\tau_2}, \dots, \lambda_{\tau_M})^T$, $\vec{A} = (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_M)^T$, $\vec{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_M)^T$, а также для сокращения введена запись $f(t) = f(t, t_0; \lambda_{0T})$ и опущены сопутствующие параметры \bar{a} в импульсных реакциях. Будем и в последующем использовать такие сокращения в громоздких формулах, если они не влекут потери информации.

Отбрасываем не значащие сомножители dt_i , $d\lambda_{\tau_m}$, $d\bar{a}_m$ и $d\tau_m$, а также плотности W_{pr} .

$$\begin{aligned}
P(\vec{\lambda}_\tau, \vec{A}, \vec{\tau}, M) &= \mu(\tau_1) \cdot \exp\left(-\int_{t_0}^{\tau_1} f(t) dt\right) \cdot \prod_{i=1}^{N_{\tau_1}} f(t_i) \cdot \exp\left(-\int_{t_0}^{\tau_1} \mu(\tau) d\tau\right) \cdot \\
\cdot \mu(\tau_2) \cdot \exp\left(-\int_{\tau_1}^{\tau_2} (f(t) + \lambda_{\tau_1} \Psi(t - \tau_1)) dt\right) \prod_{i=N_{\tau_1}+1}^{N_{\tau_2}} (f(t_i) + \lambda_{\tau_1} \Psi(t_i - \tau_1)) \cdot \exp\left(-\int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu(\tau) d\tau\right) \\
\cdot \dots \\
\cdot \mu(\tau_M) \cdot \exp\left(-\int_{\tau_{M-1}}^{\tau_M} \left(f(t) + \sum_{m=1}^{M-1} \lambda_{\tau_m} \Psi(t - \tau_m)\right) dt\right) \cdot \prod_{i=N_{\tau_{M-1}}+1}^{N_{\tau_M}} \left(f(t_i) + \sum_{m=1}^{M-1} \lambda_{\tau_m} \Psi(t_i - \tau_m)\right) \cdot \exp\left(-\int_{\tau_{M-1}}^{\tau_M} \mu(\tau) d\tau\right) \\
\cdot \exp\left(-\int_{\tau_M}^T \left(f(t) + \sum_{m=1}^M \lambda_{\tau_m} \Psi(t - \tau_m)\right) dt\right) \prod_{i=N_{\tau_M}+1}^{N_T} \left(f(t_i) + \sum_{m=1}^M \lambda_{\tau_m} \Psi(t_i - \tau_m)\right) \cdot \exp\left(-\int_{\tau_M}^T \mu(\tau) d\tau\right).
\end{aligned}$$

Используя то, что $\Psi(t) = 0$, при $t < 0$, последнее выражение можно упростить:

$$\begin{aligned}
P(\vec{\lambda}_\tau, \vec{A}, \vec{\tau}, M) &= \exp\left(-\int_{t_0}^T \sum_{m=1}^M \lambda_{\tau_m} \Psi(t - \tau_m, \bar{a}_m) dt\right) \cdot \prod_{i=1}^{N_T} \left(f(t_i) + \sum_{m=1}^{M-1} \lambda_{\tau_m} \Psi(t_i - \tau_m, \bar{a}_m)\right) \prod_{m=1}^M \mu(\tau_m) \times \\
&\times \exp\left(-\int_{t_0}^T f(t) dt\right) \exp\left(-\int_{t_0}^T \mu(\tau) d\tau\right).
\end{aligned}$$

Ясно, что множители $\exp\left(-\int_{t_0}^T f(t)dt\right)\exp\left(-\int_{t_0}^T \mu(\tau)d\tau\right)$ не несут никакой

информативной составляющей, поскольку не зависят от параметров $\vec{\lambda}_\tau, \vec{A}, \vec{\tau}, M$.

Поэтому их можно опустить и далее работать с функционалом:

$$P_{P,t \in [t_0, T]}(\vec{\lambda}_\tau, \vec{A}, \vec{\tau}, M) = \exp\left(-\int_{t_0}^T \sum_{m=1}^M \lambda_{\tau_m} \Psi(t - \tau_m, \vec{a}_m) dt\right) \cdot \prod_{i=1}^{N_T} \left(f(t_i) + \sum_{m=1}^{M-1} \lambda_{\tau_m} \Psi(t_i - \tau_m, \vec{a}_m)\right) \prod_{m=1}^M \mu(\tau_m). \quad (4)$$

В результате, статистический вес ситуаций с M -скачками интенсивности на интервале $[t_0, T)$ можно записать, используя последнее определение, так:

$$P_{P,t \in [t_0, T]}(M) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda_{\tau_1} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda_{\tau_2} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda_{\tau_M} \int_{-\infty}^{+\infty} d\vec{a}_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d\vec{a}_2 \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} d\vec{a}_M \left[\int_{t_0}^T d\tau_1 \int_{\tau_1}^T d\tau_2 \cdots \int_{\tau_M}^T d\tau_M P_{P,t \in [t_0, T]}(\vec{\lambda}_\tau, \vec{A}, \vec{\tau}, M) \right]. \quad (5)$$

Задача фильтрации (сглаживания) при этом может быть сформулирована как алгоритм расчета неизвестных параметров $\vec{\lambda}_\tau = (\lambda_{\tau_1}, \lambda_{\tau_2}, \dots, \lambda_{\tau_M})^T$, $\vec{A} = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_M)^T$, $\vec{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_M)^T$ и M , удовлетворяющих системе условий критерия максимального правдоподобия:

$$\begin{cases} \hat{M} = \arg \max_M P_{P,t \in [t_0, T]}(M), \\ \left(\hat{\vec{\lambda}}_\tau, \hat{\vec{A}}, \hat{\vec{\tau}} \right) = \arg \max_{\vec{\lambda}_\tau, \vec{A}, \vec{\tau}} P_{P,t \in [t_0, T]}(\vec{\lambda}_\tau, \vec{A}, \vec{\tau}, \hat{M}), \end{cases} \quad (6)$$

где: $P_{P,t \in [t_0, T]}(M)$ – определяется (5), $P_{P,t \in [t_0, T]}(\vec{\lambda}_\tau, \vec{A}, \vec{\tau}, \hat{M})$ – определяется (4), при $M = \hat{M}$.

По аналогии с тем, как в [6], гл. 7, для решения двухточечной краевой задачи предлагается использовать методику «инвариантного погружения», позволяющую получить рекуррентный алгоритм формирования фильтрации, так и в рассматриваемой задаче (6), в предположении высокой точности оценок, можно предложить последовательное (рекуррентное) правило:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \hat{M}(u | \hat{\tau}_{\hat{M}}) = \arg \max_{\Delta M=1,2} \left(P_{P,t \in [\hat{\tau}_{\hat{M}}, \hat{\tau}_{\hat{M}}+u]}(\Delta M) \right), \\ \text{Если } \Delta \hat{M}(u | \hat{\tau}_{\hat{M}}) = 1, \\ \quad \text{то } \left(\hat{\lambda}_{\hat{M}+1}, \hat{\vec{a}}_{\hat{M}+1}, \hat{\tau}_{\hat{M}+1} \right) = \arg \max_{\lambda_\alpha, \vec{a}_\alpha, \tau_{\hat{M}+1}} P_{P,t \in [\hat{\tau}_{\hat{M}}, \hat{\tau}_{\hat{M}}+u]}(\lambda_\alpha, \vec{a}_\alpha, \tau_{\hat{M}+1}, \Delta M = 1) \\ \quad \text{и } \hat{M} = \hat{M}, \\ \text{Если } \Delta \hat{M}(u | \hat{\tau}_{\hat{M}}) = 2, \\ \quad \text{то } \left(\hat{\lambda}_{\hat{M}+1}, \hat{\vec{a}}_{\hat{M}+1}, \hat{\tau}_{\hat{M}+1}, \hat{\lambda}_{\hat{M}+2}, \hat{\vec{a}}_{\hat{M}+2}, \hat{\tau}_{\hat{M}+2} \right) = \arg \max_{\substack{\lambda_\alpha, \vec{a}_\alpha, \tau_{\hat{M}+1}, \\ \lambda_\beta, \vec{a}_\beta, \tau_{\hat{M}+2}}} P_{P,t \in [\hat{\tau}_{\hat{M}}, \hat{\tau}_{\hat{M}}+u]}(\lambda_\alpha, \vec{a}_\alpha, \tau_{\hat{M}+1}, \lambda_\beta, \vec{a}_\beta, \tau_{\hat{M}+2}, \Delta M = 2) \\ \quad \text{и } \hat{M} = \hat{M} + 1, \\ u = u + \Delta u, \end{array} \right. \quad (7)$$

с начальными условиями: $\hat{M} = 0, \hat{\tau}_0 = t_0, \hat{\lambda}_0 = 0, u = 0$, где

$$P_{P,t \in [\hat{\tau}_{\hat{M}}, \hat{\tau}_{\hat{M}}+u]}(\lambda_\alpha, \vec{a}_\alpha, \tau_{\hat{M}+1}, \Delta M = 1), P_{P,t \in [\hat{\tau}_{\hat{M}}, \hat{\tau}_{\hat{M}}+u]}(\lambda_\alpha, \vec{a}_\alpha, \tau_{\hat{M}+1}, \lambda_\beta, \vec{a}_\beta, \tau_{\hat{M}+2}, \Delta M = 2) \text{ и } P_{P,t \in [\hat{\tau}_{\hat{M}}, \hat{\tau}_{\hat{M}}+u]}(\Delta M)$$

рассчитываются по формулам (4) и (5), соответственно.

Алгоритм (7) представляет собой рекуррентное правило, на каждом шаге которого производятся последовательные попытки обнаружения-различения с одновременной оценкой параметров ситуаций с одним и двумя скачками интенсивности. Такие попытки выполняются на интервалах $[\tau_{\hat{M}}, \tau_{\hat{M}} + u)$, распространяющихся от момента предпоследнего зафиксированного скачка с индексом \hat{M} до текущего момента времени $\tau_{\hat{M}} + u$. При обнаружении очередного скачка с индексом $\hat{M} + 2$, начало интервала обработки переносится на позицию оценки момента появления предпоследнего скачка $\hat{t}_{\hat{M}+1} \in [\hat{t}_{\hat{M}}, u)$. После этого алгоритм переходит к следующему шагу, на котором производится попытка обнаружения следующего возможного скачка с индексом $\hat{M} + 2$.

В основополагающей работе [6], в гл. 7, указывается, что техника инвариантного погружения, позволяющая свести решение двухточечной краевой задачи к уравнениям фильтрации, справедлива в случаях высокой апостериорной точности. Для дискретных моделей это означает, что каждый отдельный отсчет наблюдений (в нашем случае отдельное событие) привносит относительно малую порцию статистической информации относительно фильтруемого процесса (в нашем случае относительно интенсивности потока). В таких условиях текущие моменты времени u , задающие непрерывно увеличивающуюся правую границу интервала обработки в рекуррентном алгоритме (7), можно заменить, связав с дискретной последовательностью моментов, привязанных к возникновению наблюдаемых событий по формуле $\hat{t}_{\hat{M}} + u = t_i$, где t_i ($i = 1, 2, 3, \dots, N_T$) – момент наблюдения одного из событий, удовлетворяющих условию $t_i > \hat{t}_{\hat{M}}$. Это важное свойство позволяет избежать бесконечной вычислительной сложности.

Покажем также, что выполнение условий класса $\Psi_{\lambda, \bar{a}, t \in [0, \infty)}$ приводит к оценкам максимального правдоподобия (ОМП) моментов возникновения скачков, совпадающих с одним из моментов наблюдения событий t_i , ($i = 1, 2, 3, \dots, N_T$).

Доказательство проведем от противного.

Пусть ОМП момента возникновения очередного скачка $\hat{t}_{\hat{M}+1} \in [\hat{t}_{\hat{M}}, t)$ не совпадает ни с одной из позиций наблюдаемых событий. Не ограничивая общности будем полагать, что этот момент принадлежит интервалу между соседними позициями наблюдаемых событий с номерами i и $i+1$, т.е. $\hat{t}_{\hat{M}+1} \in (t_i, t_{i+1})$.

Рассмотрим бесконечно малое изменение позиции $\hat{t}_{\hat{M}+1} + \Delta\tau$.

На рис. 2 показан поясняющий пример изменения оценок интенсивности параметров. Для сокращения записи введены обозначения:

$$R_1(t, \hat{t}_{\hat{M}+1}) = \hat{\lambda}_{\hat{M}}(\hat{t}_{\hat{M}}, \hat{t}_{\hat{M}+1}) \Psi(t - \hat{t}_{\hat{M}}, \hat{a}_{\hat{M}}(\hat{t}_{\hat{M}}, \hat{t}_{\hat{M}+1})),$$

$$R_1(t, \hat{t}_{\hat{M}+1} + \Delta\tau) = \hat{\lambda}_{\hat{M}}(\hat{t}_{\hat{M}}, \hat{t}_{\hat{M}+1} + \Delta\tau) \Psi(t - \hat{t}_{\hat{M}}, \hat{a}_{\hat{M}}(\hat{t}_{\hat{M}}, \hat{t}_{\hat{M}+1} + \Delta\tau)),$$

$$R_2(t, \hat{t}_{\hat{M}+1}) = \hat{\lambda}_{\hat{M}}(\hat{t}_{\hat{M}}, \hat{t}_{\hat{M}+1}) \Psi(t - \hat{t}_{\hat{M}}, \hat{a}_{\hat{M}}(\hat{t}_{\hat{M}}, \hat{t}_{\hat{M}+1})) + \hat{\lambda}_{\hat{M}+1}(\hat{t}_{\hat{M}+1}, t) \Psi(t - \hat{t}_{\hat{M}+1}, \hat{a}_{\hat{M}+1}(\hat{t}_{\hat{M}+1}, t)),$$

$$R_2(t, \hat{t}_{\hat{M}+1} + \Delta\tau) = \hat{\lambda}_{\hat{M}}(\hat{t}_{\hat{M}}, \hat{t}_{\hat{M}+1} + \Delta\tau) \Psi(t - \hat{t}_{\hat{M}}, \hat{a}_{\hat{M}}(\hat{t}_{\hat{M}}, \hat{t}_{\hat{M}+1} + \Delta\tau)) + \hat{\lambda}_{\hat{M}+1}(\hat{t}_{\hat{M}+1} + \Delta\tau, t) \Psi(t - \hat{t}_{\hat{M}+1} - \Delta\tau, \hat{a}_{\hat{M}+1}(\hat{t}_{\hat{M}+1} + \Delta\tau, t)),$$

где: $\hat{\lambda}_K(\tau_K, \tau_{K+1})$ и $\hat{a}_K(\tau_K, \tau_{K+1})$ обозначают ОМП амплитуды λ_K и сопутствующих параметров \bar{a}_K скачка интенсивности с индексом K , формируемые на интервале наблюдения (τ_K, τ_{K+1}) . Для ОМП амплитуды $\hat{\lambda}_K(\tau_K, \tau_{K+1})$ легко получить уравнение путем дифференцирования (4). На рис. 2 изображено изменение

параметров скачка при смещении оценки момента его появления на бесконечно малую величину $\Delta\tau$:

$$\sum_{\substack{t_j < \tau_{K+1} \\ t_j \geq \tau_K}} \frac{\Psi(t_j - \tau_K, \bar{a}_k)}{\left(f(t_j) + \sum_{m=1}^{K-1} \hat{\lambda}_m \Psi(t_j - \hat{\tau}_m, \hat{a}_m) \right) + \hat{\lambda}_K(\tau_K, \tau_{K+1}) \Psi(t_j - \tau_K, \bar{a}_k)} = \int_{\tau_K}^{\tau_{K+1}} \Psi(u - \tau_K, \bar{a}_k) du.$$

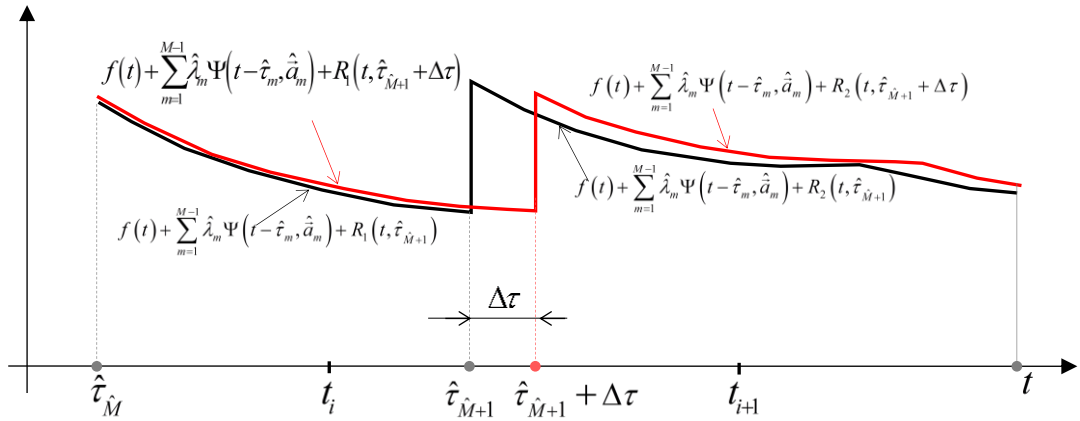


Рисунок 2

В силу свойств параметрического класса $\Psi_{\lambda, \bar{a}, t \in [0, \infty)}$, на интервалах $[\hat{\tau}_{\hat{M}}, \hat{\tau}_{\hat{M}+1})$ и $[\hat{\tau}_{\hat{M}+1} + \Delta\tau, t)$ мы всегда можем обеспечить полное совпадение зависимостей $R_1(\hat{\tau}_{\hat{M}+1})$ и $R_2(\hat{\tau}_{\hat{M}+1})$ (черного цвета) с зависимостями $R_2(\hat{\tau}_{\hat{M}+1})$ и $R_2(\hat{\tau}_{\hat{M}+1} + \Delta\tau)$ (красного цвета). Поэтому для отношения апостериорной вероятности возникновения скачка в момент времени $\hat{\tau}_{\hat{M}+1} + \Delta\tau$ к апостериорной вероятности возникновения скачка в момент времени $\hat{\tau}_{\hat{M}+1}$ получаем оценку снизу:

$$\frac{P_{P, t \in [\hat{\tau}_{\hat{M}}, t)}(\hat{\lambda}_{\hat{M}+1}(\hat{\tau}_{\hat{M}+1} + \Delta\tau, t), \hat{a}_{\hat{M}+1}(\hat{\tau}_{\hat{M}+1} + \Delta\tau, t), \hat{\tau}_{\hat{M}+1} + \Delta\tau, 1)}{P_{P, t \in [\hat{\tau}_{\hat{M}}, t)}(\hat{\lambda}_{\hat{M}+1}(\hat{\tau}_{\hat{M}+1}, t), \hat{a}_{\hat{M}+1}(\hat{\tau}_{\hat{M}+1}, t), \hat{\tau}_{\hat{M}+1}, 1)} \geq 1 + \Delta\tau \cdot \hat{\lambda}_{\hat{M}+1}(\hat{\tau}_{\hat{M}+1}, t) \lim_{u \searrow +0} \Psi(u, \hat{a}_{\hat{M}+1}(\hat{\tau}_{\hat{M}+1}, t)),$$

которое в силу свойства, установленного в (2) ($\lim_{t \searrow +0} (\text{sign} \Psi(t, \bar{a}_1)) = 1$) всегда можно сделать больше 1 путем выбора знака $\Delta\tau$, совпадающим со знаком $\hat{\lambda}_{\hat{M}+1}(\hat{\tau}_{\hat{M}+1}, t)$. Но последнее означает, что в момент $\hat{\tau}_{\hat{M}+1} \in [\hat{\tau}_{\hat{M}}, t)$ максимум апостериорной вероятности не достигается. Полученное противоречие указывает на то, что максимальная апостериорная вероятность может достигаться только для оценок моментов скачков $\hat{\tau}_{\hat{M}}$ ($\hat{M} = 1, 2, \dots$), принадлежащих конечному множеству моментов наблюдаемых событий t_i ($i = 1, 2, 3, \dots, N_T$).

Поэтому в алгоритме фильтрации (7) можно ограничиться проверкой ситуаций с выбором моментов возникновения скачка в одной из позиций наблюдаемых событий.

Остается только конкретизировать, каким образом можно снизить вычислительные затраты в (7) при формировании статистического веса показателя $P_{P, t \in [\hat{\tau}_{\hat{M}}, \hat{\tau}_{\hat{M}} + u)}(\Delta M)$, рассчитываемого согласно (5).

Для этого воспользуемся известным результатом, приведенным в [8] на стр. 170. Он утверждает, что если логарифм функционала отношения правдоподобия (ЛФОП), рассматриваемый как функция от оцениваемого параметра момента времени, при отсутствии шума обладает изломом в точке максимума, то апостериорное распределение ОМП указанного параметра асимптотически (с ростом точности) сходится к симметричному экспоненциальному закону. В нашем случае ЛФОП, рассматриваемый как функция от аргумента $\hat{\tau}_{\hat{M}+2}$, имеет вид:

$$L\left(\hat{\tau}_{\hat{M}+2} \mid \hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_{\hat{M}}, \lambda_{\hat{M}+1}, \lambda_{\hat{M}+2}, \hat{a}_1, \dots, \hat{a}_{\hat{M}}, \bar{a}_{\hat{M}+1}, \bar{a}_{\hat{M}+2}, \hat{\tau}_1, \dots, \hat{\tau}_{\hat{M}}, \tau_{\hat{M}+1}; t\right) =$$

$$= - \int_{\hat{\tau}_{\hat{M}}}^t \left\{ f(\xi) + \sum_{m=1}^{\hat{M}} \hat{\lambda}_m \Psi(\xi - \hat{\tau}_m, \hat{a}_m) + \lambda_{\hat{M}+1} \Psi(\xi - \tau_{\hat{M}+1}, \bar{a}_{\hat{M}+1}) + \lambda_{\hat{M}+2} \Psi(\xi - \hat{\tau}_{\hat{M}+2}, \bar{a}_{\hat{M}+2}) \right\} d\xi +$$

$$+ \sum_{\substack{t_j < t \\ t_j \geq \hat{\tau}_{\hat{M}}}} \left(\ln f(t_j) + \sum_{m=1}^{\hat{M}} \hat{\lambda}_m \Psi(t_j - \hat{\tau}_m, \hat{a}_m) + \lambda_{\hat{M}+1} \Psi(t_j - \tau_{\hat{M}+1}, \bar{a}_{\hat{M}+1}) + \lambda_{\hat{M}+2} \Psi(t_j - \hat{\tau}_{\hat{M}+2}, \bar{a}_{\hat{M}+2}) \right)$$

и обладает изломом в позиции максимума, если $\lim_{t \rightarrow +0} \Psi(t, \bar{a}_{\hat{M}+2}) > 0$. Поэтому условное распределение истинного значения момента возникновения скачка в таких случаях будет:

$$W_{ps}(\tau_{M+2} \mid \hat{\tau}_{\hat{M}+2}) \approx \frac{1}{2\sigma_{\tau_{M+2}}} \exp\left(-|\tau_{M+2} - \hat{\tau}_{\hat{M}+2}| / \sigma_{\tau_{M+2}}\right),$$

где: $2 \cdot \sigma_{\tau_{M+2}}^2$ – апостериорная условная дисперсия ошибки оценки момента возникновения скачка, $\hat{\tau}_{\hat{M}+2}$ – ОМП момента возникновения скачка. Следовательно, относительный апостериорный статистический вес смещенных позиций скачка можно задать функцией:

$$w(\tau_{M+2} \mid \hat{\tau}_{\hat{M}+2}) \cdot \mu \exp(-\mu(\tau_{M+2} - \tau_{\hat{M}+1})) \approx \exp(-|\tau_{M+2} - \hat{\tau}_{\hat{M}+2}| / \sigma_{\tau_{M+2}}) \cdot \mu \exp(-\mu(\tau_{M+2} - \hat{\tau}_{\hat{M}+1}))$$

где: множитель $\mu \exp(-\mu(\tau_{M+2} - \hat{\tau}_{\hat{M}+1}))$ связан с априорной вероятностью возникновения скачка.

В работе [7], гл. 3, получено выражение для апостериорной условной дисперсии $2 \cdot \sigma_{\tau_{M+2}}^2$, которое, с точностью до замены обозначений, имеет вид:

$$2 \cdot \sigma_{\tau_{M+2}}^2 = \frac{(t - \hat{\tau}_{\hat{M}+1})^2}{N_z^2} \frac{26}{\left(\hat{\lambda}_{\hat{M}+2} \Psi(0, \bar{a}_{\hat{M}+2}) / \left(f(\hat{\tau}_{\hat{M}+2}) + \sum_{m=1}^{\hat{M}+1} \hat{\lambda}_m \Psi(\hat{\tau}_{\hat{M}+2} - \hat{\tau}_m, \hat{a}_m) \right) \right)^4},$$

где: $N_z = \sum_{\substack{t_j < \hat{\tau}_{\hat{M}+2} \\ t_j \geq \hat{\tau}_{\hat{M}+1}}} 1$ – количество событий, наблюдаемое на интервале $[\hat{\tau}_{\hat{M}+1}, \hat{\tau}_{\hat{M}+2})$.

Отсюда для статистического веса гипотезы наличия скачка на интервале $[\hat{\tau}_{\hat{M}}, t)$ получаем:

$$\rho(\hat{\tau}_{\hat{M}+2}, t) \approx \rho_0 \int_{\hat{\tau}_{\hat{M}+1}}^t \exp\left(-\frac{|\xi - \hat{\tau}_{\hat{M}+2}|}{\sigma_{\tau_{\hat{M}+2}}}\right) \cdot \mu \exp(-\mu(\xi - \hat{\tau}_{\hat{M}+1})) d\xi \Bigg/ \int_{\hat{\tau}_{\hat{M}+1}}^t \mu \exp(-\mu(\xi - \hat{\tau}_{\hat{M}+2})) d\xi =$$

$$= \rho_0 \mu \sigma_{\tau_{\hat{M}+2}} \exp\left(\mu(t - \hat{\tau}_{\hat{M}+2})\right) \left\{ \frac{1 - \exp\left(-\frac{1 - \mu \sigma_{\tau_{\hat{M}+2}}}{\sigma_{\tau_{\hat{M}+2}}} (\hat{\tau}_{\hat{M}+2} - \hat{\tau}_{\hat{M}+1})\right)}{1 - \mu \sigma_{\tau_{\hat{M}+2}}} + \frac{1 - \exp\left(-\frac{1 + \mu \sigma_{\tau_{\hat{M}+2}}}{\sigma_{\tau_{\hat{M}+2}}} (t - \hat{\tau}_{\hat{M}+2})\right)}{1 + \mu \sigma_{\tau_{\hat{M}+2}}} \right\}, \quad (8)$$

$$\text{где: } \sigma_{\tau_{\hat{M}+2}} = \frac{(t - \hat{\tau}_{\hat{M}+1}) \sqrt{13}}{N_z \left(\hat{\lambda}_{\hat{M}+2} \Psi(0, \hat{a}_{\hat{M}+2}) \Big/ \left(f(\hat{\tau}_{\hat{M}+2}) + \sum_{m=1}^{\hat{M}+1} \hat{\lambda}_m \Psi(\hat{\tau}_{\hat{M}+2} - \hat{\tau}_m, \hat{a}_m) \right) \right)^2}, \quad (9)$$

$$\rho_0 = \frac{(\hat{\tau}_{\hat{M}+2} - \hat{\tau}_{\hat{M}+1})(t - \hat{\tau}_{\hat{M}+2})}{(t - \hat{\tau}_{\hat{M}+1})^2} - \text{корректирующий множитель, устраняющий}$$

эффект повышения вероятности ложных обнаружений, возникающий на краях интервала обработки, величина которого получена в [9].

Решающее правило для обнаружения очередного скачка, присутствующее в первой строке алгоритма (7), при этом будет сводиться к следующему:

$$D(t_N | \hat{\tau}_{\hat{M}}) = \max_{\hat{\tau}_{\hat{M}+1} < t_k < t_N} \left[- \int_{\hat{\tau}_{\hat{M}+1}}^{t_N} \left\{ \hat{\lambda}_{\hat{M}+1}(\hat{\tau}_{\hat{M}+1}, t_k) \Psi(\xi - \hat{\tau}_{\hat{M}+1}, \hat{a}_{\hat{M}+1}(\hat{\tau}_{\hat{M}+1}, t_k)) - \hat{\lambda}_{\hat{M}+1}(\hat{\tau}_{\hat{M}+1}, t_N) \Psi(\xi - \hat{\tau}_{\hat{M}+1}, \hat{a}_{\hat{M}+1}(\hat{\tau}_{\hat{M}+1}, t_N)) \right\} + \right.$$

$$\left. + \hat{\lambda}_{\hat{M}+2}(t_k, t_N) \Psi(\xi - t_k, \hat{a}_{\hat{M}+2}(t_k, t_N)) \right] d\xi +$$

$$+ \sum_{t_j \geq \hat{\tau}_{\hat{M}+1}}^{t_j < t_N} \ln \left(\frac{\hat{\lambda}_{\hat{M}+1}(\hat{\tau}_{\hat{M}+1}, t_k) \Psi(t_j - \hat{\tau}_{\hat{M}+1}, \hat{a}_{\hat{M}+1}(\hat{\tau}_{\hat{M}+1}, t_k)) + \hat{\lambda}_{\hat{M}+2}(t_k, t_N) \Psi(t_j - t_k, \hat{a}_{\hat{M}+2}(t_k, t_N))}{\hat{\lambda}_{\hat{M}+1}(\hat{\tau}_{\hat{M}+1}, t_N) \Psi(t_j - \hat{\tau}_{\hat{M}+1}, \hat{a}_{\hat{M}+1}(\hat{\tau}_{\hat{M}+1}, t_N))} \right) + \quad (10)$$

$$+ \ln(\rho(t_k, t_N)) \Bigg]_{\substack{\Delta \hat{M}(t_N | \hat{\tau}_{\hat{M}}) = 2 \\ > \\ < \\ \Delta \hat{M}(t_N | \hat{\tau}_{\hat{M}}) = 1}} 0,$$

где: t_N – один из моментов наблюдаемых событий t_i , ($i = 1, 2, 3, \dots, N_T$), задающий правый конец интервала обработки;

t_k – один из моментов наблюдаемых событий принадлежащий интервалу $[\hat{\tau}_{\hat{M}+1}, t_N)$
 $\hat{\lambda}_{\hat{M}+1}(\hat{\tau}_{\hat{M}+1}, t_k)$, $\hat{\lambda}_{\hat{M}+1}(\hat{\tau}_{\hat{M}+1}, t_N)$ и $\hat{a}_{\hat{M}+1}(\hat{\tau}_{\hat{M}+1}, t_k)$, $\hat{a}_{\hat{M}+1}(\hat{\tau}_{\hat{M}+1}, t_N)$ – ОМП амплитуды и вспомогательных параметров $\hat{M}+1$ -го скачка, построенные на интервалах $[\hat{\tau}_{\hat{M}+1}, t_k)$ и $[\hat{\tau}_{\hat{M}+1}, t_N)$, соответственно, и удовлетворяющие для $\hat{\lambda}_{\hat{M}+1}$ уравнению:

$$\sum_{t_j \geq \hat{\tau}_{\hat{M}+1}}^{t_j < t_k(N)} \frac{\Psi(t_j - \hat{\tau}_{\hat{M}+1}, \hat{a}_{\hat{M}+1})}{\left(f(t_j) + \sum_{m=1}^{\hat{M}} \hat{\lambda}_m \Psi(t_j - \hat{\tau}_m, \hat{a}_m) \right) + \hat{\lambda}_{\hat{M}+1}(\tau_{\hat{M}+1}, t_k(N)) \Psi(t_j - \tau_{\hat{M}+1}, \hat{a}_{\hat{M}+1})} = \int_{\hat{\tau}_{\hat{M}}}^{t_k(N)} \Psi(\xi - \hat{\tau}_{\hat{M}+1}, \hat{a}_{\hat{M}+1}) d\xi,$$

и для

$$\hat{a}_{\hat{M}+1} \quad (11)$$

$$\sum_{t_j \geq \hat{t}_{\hat{M}+1}}^{t_j < t_{k(N)}} \frac{\partial \Psi(t_j - \hat{t}_{\hat{M}+1}, \hat{a}_{\hat{M}+1}) / \partial \hat{a}_{\hat{M}+1}}{\left(f(t_j) + \sum_{m=1}^{\hat{M}} \hat{\lambda}_m \Psi(t_j - \hat{t}_m, \hat{a}_m) \right) + \hat{\lambda}_{\hat{M}+1}(\tau_{\hat{M}+1}, t_{k(N)}) \Psi(t_j - \tau_{\hat{M}+1}, \hat{a}_{\hat{M}+1})} = \int_{\hat{t}_{\hat{M}}}^{t_{k(N)}} \frac{\partial}{\partial \hat{a}_{\hat{M}+1}} \Psi(\xi - \hat{t}_{\hat{M}+1}, \hat{a}_{\hat{M}+1}) d\xi;$$

$\hat{\lambda}_{\hat{M}+2}(t_k, t_N)$ и $\hat{a}_{\hat{M}+2}(t_k, t_N)$ – ОМП амплитуды и вспомогательных параметров предполагаемого $\hat{M} + 2$ -го скачка, построенные на интервале $[t_k, t_N)$, и удовлетворяющие для $\hat{\lambda}_{\hat{M}+2}$ уравнению:

$$\sum_{t_j \geq t_k}^{t_j < t_N} \frac{\Psi(t_j - t_k, \hat{a}_{\hat{M}+2})}{\left(f(t_j) + \sum_{m=1}^{\hat{M}+1} \hat{\lambda}_m \Psi(t_j - \hat{t}_m, \hat{a}_m) \right) + \hat{\lambda}_{\hat{M}+2}(t_k, t_N) \Psi(t_j - t_k, \hat{a}_{\hat{M}+2})} = \int_{t_k}^{t_N} \Psi(\xi - t_k, \hat{a}_{\hat{M}+2}) d\xi,$$

И для

$$\hat{a}_{\hat{M}+2} \tag{12}$$

$$\sum_{t_j \geq t_k}^{t_j < t_N} \frac{\partial \Psi(t_j - t_k, \hat{a}_{\hat{M}+2}) / \partial \hat{a}_{\hat{M}+2}}{\left(f(t_j) + \sum_{m=1}^{\hat{M}+1} \hat{\lambda}_m \Psi(t_j - \hat{t}_m, \hat{a}_m) \right) + \hat{\lambda}_{\hat{M}+2}(t_k, t_N) \Psi(t_j - t_k, \hat{a}_{\hat{M}+2})} = \int_{t_k}^{t_N} \frac{\partial}{\partial \hat{a}_{\hat{M}+2}} \Psi(\xi - t_k, \hat{a}_{\hat{M}+2}) d\xi;$$

$\rho(t_k, t_N)$ – определяется согласно (9), (10) при условии $\hat{t}_{\hat{M}+2} = t_k$ и $t = t_N$ и параметрах:

$\hat{\lambda}_{\hat{M}+1} = \hat{\lambda}_{\hat{M}+1}(\hat{t}_{\hat{M}+1}, t_k)$, $\hat{a}_{\hat{M}+1} = \hat{a}_{\hat{M}+1}(\hat{t}_{\hat{M}+1}, t_k)$ и $\hat{\lambda}_{\hat{M}+2} = \hat{\lambda}_{\hat{M}+2}(t_k, t_N)$, $\hat{a}_{\hat{M}+2} = \hat{a}_{\hat{M}+2}(t_k, t_N)$, удовлетворяющих (11) и (12).

Уравнения (11) и (12) нельзя решить в общем виде аналитически, но они в большинстве случаев тривиальны для численных методов, например, половинного деления.

Объединяя (7) с расчетными соотношениями (8)-(12), получаем алгоритм фильтрации интенсивности пуассоновского потока в условиях возможного возникновения скачков, обладающий полиномиальной сложностью. Для его скоростной реализации на РС были использованы подходы повышения производительности, разработанные в [10].

Анализ синтезированного алгоритма фильтрации

Анализ работы синтезированного алгоритма был проведен с помощью моделирования. Для этого была написана программа, формирующая пуассоновский поток событий с изменяющейся интенсивностью. При этом интенсивность формировалась программой в каждый момент как сумма детерминированной составляющей и импульсных реакций скачков, возникших в случайные моменты времени, задаваемых порождающим пуассоновским потоком. Амплитуды скачков формировались как независимые случайные значения, отвечающие двустороннему экспоненциальному распределению.

На рис. 3 показан характерный пример изменяющейся интенсивности для случая гармонической детерминированной составляющей и экспоненциальных реакций от отдельных скачков. Также на рис. 3 голубым цветом показаны суммарные значения на интервалах в 100 единиц для чисел событий наблюдаемого пуассоновского потока. Эти значения отложены по вспомогательной оси. По

горизонтальной оси отложено время в единицах среднего интервала между появлением событий наблюдаемого пуассоновского потока. Штриховой линией показана детерминированная составляющая изменяющейся интенсивности. Красным цветом показана интенсивность с наложенными реакциями от случайных скачков. Средняя длительность реакции на скачок равнялась 1000.

На рис. 4 показано поведение во времени решающей функции обнаружителя скачков (10). Видно, что превышение порога, равного 0, возникает в окрестности истинных моментов появления скачков. Даже почти «слипающиеся» по времени возникновения скачки с номерами 3, 4 и 5 различаются обнаружителем.

На рис. 5 детально показано истинное изменение интенсивности (синяя сплошная зависимость) потока и сформированной алгоритмом фильтрации его оценки (зеленая штриховая зависимость) в окрестности 1-го скачка. Также внизу на рис.5 показаны отдельные события наблюдаемого пуассоновского потока в виде вертикальных отрезков, размещенных в моментах их возникновения. Черной штриховой зависимостью показана детерминированная составляющая интенсивности. «Ступенька» соответствует возникшему 1-му скачку.

На рис. 6 показаны результаты работы алгоритма фильтрации в части решения уравнений (11), (12) для получения оценок амплитуды скачков. Красная штриховая зависимость показывает значения формируемых псевдооценок амплитуды (до обнаружения) 1-го скачка, согласно уравнению (12). Зеленая штриховая зависимость показывает результаты последовательного уточнения оценки амплитуды 1-го скачка, получаемые путем решения уравнения (11) после обнаружения при последовательном увеличении интервала обработки $[\hat{t}_1, t_N)$. Небольшое смещение позиций «ступенек» синих и зеленых зависимостей на рис. 5 и 6 связано с ошибкой оценки момента 1-го скачка алгоритмом фильтрации.

В таблице в верхних двух стоках приведены истинные значения моментов возникновения и амплитуд первых 10-ти случайных скачков интенсивности наблюдаемого пуассоновского потока, а в последних двух – их оценки, сформированные алгоритмом фильтрации. На рис. 3 представлены изменяющаяся интенсивность пуассоновского потока и наблюдаемые события.

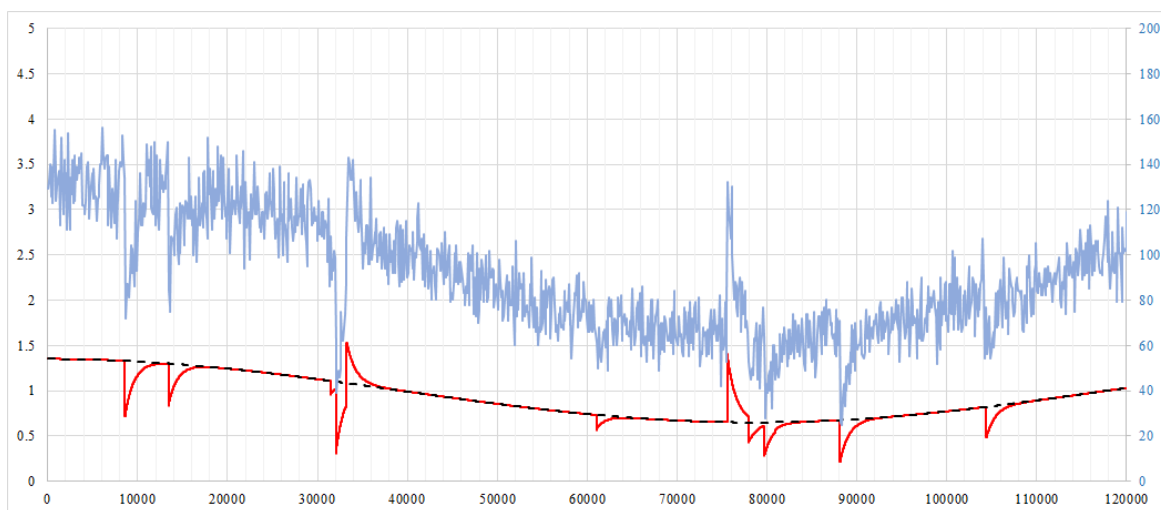


Рисунок 3

На рис. 4 показано поведение решающей функции обнаружителя скачков.



Рисунок 4

На рис. 5 показана сформированная алгоритмом фильтрации оценка интенсивности пуассоновского потока в окрестности 1-го скачка.

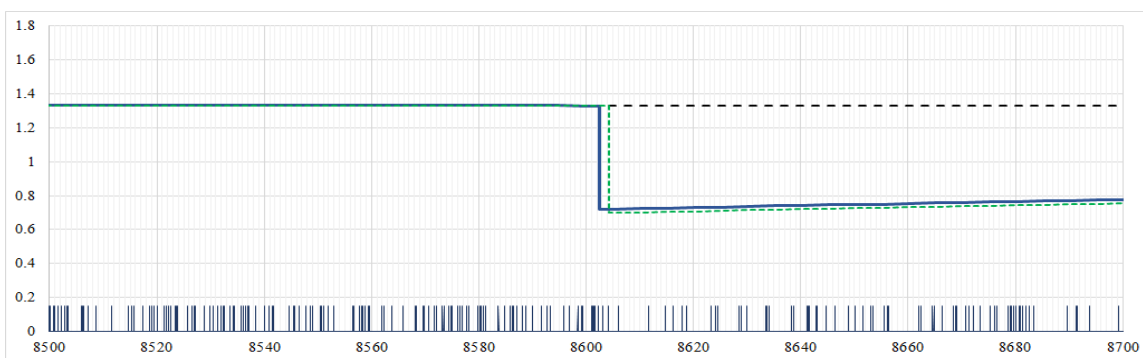


Рисунок 5

На рис. 6 представлены формирование алгоритмом фильтрации оценки момента возникновения 1-го скачка и псевдооценок (до обнаружения) и уточняющих оценок его амплитуды.

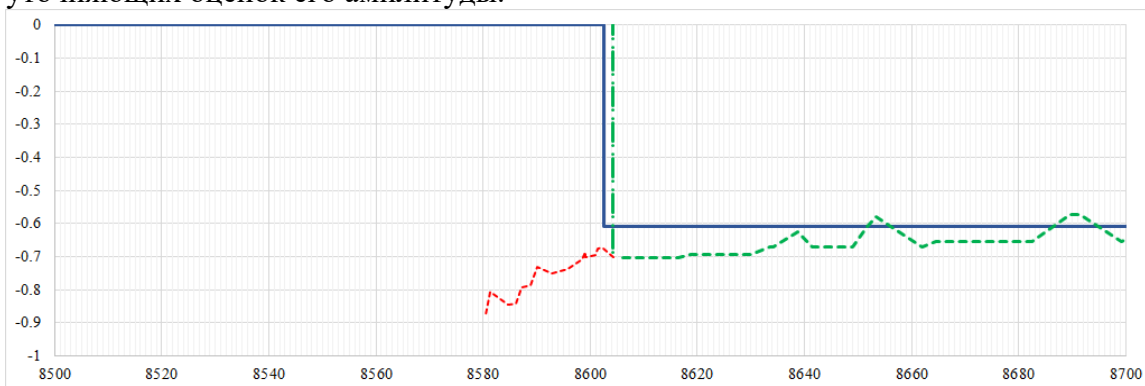


Рисунок 6

В табл. 1 приведены результаты работы алгоритма фильтрации в рассмотренной тестовой ситуации.

Таблица 1.

	Номер скачка									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
τ	8602,54	13420,42	31482,01	32042,41	33261,49	61023,19	75576,78	77951,72	79725,13	80893,74
λ	-0,61	-0,454	-0,14	-0,712	0,682	-0,157	0,749	-0,287	-0,321	0,029
$\hat{\tau}$	8604,23	1399,84	31338,97	32031,67	33235,66	61023,91	75579,34	77943,65	79714,31	Не обнаружен
$\hat{\lambda}$	-0,631	-0,447	-0,133	-0,705	0,667	-0,146	0,713	-0,208	-0,271	

В принципе результаты фильтрации довольно точно совпадают с истинными значениями. Только не произошло обнаружения 10-го скачка. Объясняется это его низким уровнем (0,029), что замаскировало его под шумом.

Заключение

В результате исследования синтезирован алгоритм фильтрации изменяющейся интенсивности наблюдаемого пуассоновского потока событий для модели движения, включающей порождающий процесс также в виде пуассоновского потока скачков с последствием. Алгоритм фильтрации включает блок обнаружения и блок оценивания параметров последовательности скачков порождающего процесса. Показано, что оценки моментов скачков при определенных довольно общих условиях, накладываемых на импульсную реакцию, следует привязывать к моментам пуассоновских событий, фиксируемых в канале наблюдений. Проведено тестирование алгоритма фильтрации, подтвердившее высокие показатели качества его работы.

Литература

1. Патент на изобретение RU 2254592 С1. Способ локации цели (варианты) / Дунаев И.Б., Бокк Г.О. Заявка № 2003134395/09 от 28.11.2003; опубл.20.06.2005, Бюл. № 17. – 2 с.
2. Шорин О.А., Бокк Г.О. Снижение негативного влияния высоких значений пик-фактора сигналов в системе McWiLL // Экономика и качество систем связи, 2019. – № 1 (11). – С. 9-13.
3. Шорин О.А., Бокк Г.О. Аналитическое решение вариационной задачи Шеннона по определению оптимальной структуры сигнала в условиях ограничения пиковой мощности // Экономика и качество систем связи, 2018. – № 1 (7). – С. 30-39.
4. Шорин О.А., Бокк Г.О. Численные результаты решения вариационной задачи Шеннона определения оптимальной структуры сигнала в условиях ограничения пиковой мощности // Экономика и качество систем связи, 2018. – № 1 (7). – С. 39-47.
5. Шорин А.О. Исследование и разработка методов повышения эффективности обслуживания трафика в системах мобильной связи: дис. ... к-та техн. наук: 05.12.13/ Шорин Александр Олегович. М., 2017. – 191 с.
6. Э. Сейдж, Дж. Мелса. Идентификация систем управления. – М.: Наука, гл. ред. Физ-мат литературы, 1974. – 248 с.
7. Трифонов А.П., Шинаков Ю.С. Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех. – М.: Радио и связь, 1986. – 264 с.
8. Шорин О.А. Методы оптимального распределения частотно-временного ресурса в системах подвижной радиосвязи: дис. ... д-ра техн. наук: 05.12.13 / Шорин Олег Александрович. М., 2005. – 351 с.
9. Trifonov A.P., Buteiko V.K., Bokk G.O. Efficiency of Testing of the Change in the Poisson Flow Intensity // Second IFAC Symposium on Stochastic Control. – Part II. – Vilnius, USSR. – May, 1986. – P. 249-254.

10. Бокк Г.О. Оптимизация ассемблерного кода БПФ, ориентированного на обработку OFDM сигналов сотовых сетей связи // Экономика и качество систем связи, 2017. – № 4 (6). – С. 40-51.